

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Nr. 24.

UNTERREDUNGEN

UND

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

VON

GALILEO GALILEI.

DRITTER UND VIERTER TAG

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG



2. Tag mit 26 Fig. im Text. Aus d. Italien. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) ℳ 3.—.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

UNTERREDUNGEN

und

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

über

zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,

von

GALILEO GALILEI.

Arcetri, 6. März 1638.

Dritter und vierter Tag mit 90 Figuren im Text.

Aus dem Italienischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

Arthur von Oettingen.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1891.

Unterredungen u. mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,

von

Galileo Galilei.

Dritter Tag.

Ueber die örtliche Bewegung.

Ueber einen sehr alten Gegenstand bringen wir eine ganz neue Wissenschaft. Nichts ist älter in der Natur als die Bewegung, und über dieselbe giebt es weder wenig noch geringe Schriften der Philosophen. Dennoch habe ich deren Eigenthümlichkeiten in grosser Menge und darunter sehr wissenswerthe, bisher aber nicht erkannte und noch nicht bewiesene, in Erfahrung gebracht. Einige leichtere Sätze hört man nennen: wie zum Beispiel, dass die natürliche Bewegung fallender schwerer Körper eine stetig beschleunigte sei. In welchem Maasse aber diese Beschleunigung stattfinde, ist bisher nicht ausgesprochen worden; denn so viel ich weiss, hat Niemand bewiesen, dass die vom fallenden Körper in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken sich zu einander verhalten wie die ungeraden Zahlen. Man hat beobachtet, dass Wurfgeschosse eine gewisse Curve beschreiben; dass letztere aber eine Parabel sei. hat Niemand gelehrt. Dass aber dieses sich so verhält und noch vieles andere, nicht minder Wissenswerthe, soll von mir bewiesen werden, und was noch zu thun übrig bleibt, zu dem wird die Bahn geebnet, zur Errichtung einer sehr weiten, ausserordentlich wichtigen Wissenschaft, deren Anfangsgründe diese

vorliegende Arbeit bringen soll, in deren tiefere Geheimnisse einzudringen Geistern vorbehalten bleibt, die mir überlegen sind.

In drei Theile zerfällt unsere Abhandlung. In dem ersten betrachten wir die gleichförmige Bewegung. In dem zweiten beschreiben wir die gleichförmig beschleunigte Bewegung. In dem dritten handeln wir von der gewaltsamen Bewegung oder von den Wurfgeschossen.

Ueber die gleichförmige Bewegung.

Die gleichförmige Bewegung müssen wir allem zuvor beschreiben.

Definition.

Ich nenne diejenige Bewegung gleichförmig, bei welcher die in irgend welchen gleichen Zeiten vom Körper zurückgelegten Strecken unter einander gleich sind.

Erläuterung.

Der althergebrachten Definition (welche einfach von gleichen Strecken in gleichen Zeiten sprach) haben wir das Wort »irgend welchen« hinzugefügt, d. h. zu jedweden gleichen Zeiten: denn es wäre möglich, dass in gewissen Zeiten gleiche Strecken, dagegen in kleineren gleichen Theilen dieser selben Zeiten ungleiche Strecken zurückgelegt werden. Die vorliegende Definition enthält vier Axiome oder Grundwahrheiten: nämlich

I. Axiom.

Die bei ein und derselben Bewegung in längerer Zeit zurückgelegte Strecke ist grösser als die in kürzerer Zeit vollendete.

II. Axiom.

Bei gleichförmiger Bewegung entspricht der grösseren Strecke eine grössere Zeit.

III. Axiom.

In gleichen Zeiten wird bei grösserer Geschwindigkeit eine grössere Strecke zurückgelegt als bei kleinerer Geschwindigkeit.

IV. Axiom.

Die Geschwindigkeit, bei welcher in einer gewissen Zeit eine grössere Strecke zurückgelegt wird, ist grösser, als die Geschwindigkeit, bei welcher in derselben Zeit eine kleinere Strecke vollendet wird.[1])

Theorem I. Proposition I.

»Wenn ein gleichförmig bewegter Körper mit gleicher Geschwindigkeit zwei Strecken zurücklegt, so verhalten sich die Zeiten wie die Strecken.«

Es lege der Körper mit gleichen Geschwindigkeiten zwei Strecken AB, BC zurück (Fig. 40) und es werde die für AB

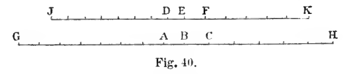


Fig. 40.

nöthige Zeit durch DE dargestellt; die Zeit für die Strecke BC sei EF. Ich behaupte, wie AB zu BC, so wird die Zeit DE zu EF sich verhalten. Verlängert man nach beiden Seiten die Strecken und die Zeiten gegen GH, JK, und theile man auf AG beliebig viel gleiche Strecken ab gleich AB, und eben so viel Zeiten gleich DE auf DJ; andererseits auf CH beliebig viele Theile gleich BC und eben so viele Zeiten in FK gleich EF. Alsdann wird die Strecke BG und die Zeit EJ dasselbe willkürlich gewählte Vielfache von BA und DE sein, und ähnlich wird die Strecke HB und die Zeit KE dasselbe beliebige Vielfache der Strecke CB und der Zeit FE sein. Und weil DE die Zeit der Bewegung durch AB, so wird die Gesammtzeit EJ sich auf die gesammte Strecke BG beziehen, und es wird in EJ eben so viel Zeittheile gleich DE geben, wie Theile BA in BG, und ähnlich findet man, dass KE die Bewegungszeit durch die Strecke HB sei. Wenn aber eine gleichförmige Bewegung angenommen wird, und GB gleich BH ist, so wird auch die Zeit JE gleich der Zeit EK sein, und wenn GB grösser als BH, so wird auch JE grösser als EK sein, und wenn weniger, dann weniger. Vier Grössen kommen in Betracht: 1. AB, 2. BC, 3. DE, 4. EF, und die ersten und die dritten, nämlich die Strecken, die gleich AB gemacht sind, und die

Zeiten gleich DE, sind gleich oft in beliebiger Anzahl genommen in der Strecke GB und in der Zeit JE, und es war bewiesen worden, dass diese letzteren entweder beide zugleich gleich seien den Zeiten EK und der Strecke BH, oder beide zugleich grösser oder beide kleiner, daher haben auch die zweiten und vierten Strecken gleiches Verhältniss. Daher verhält sich die erste zur zweiten, d. h. Strecke AB zur Strecke BC, wie die dritte zur vierten Grösse, nämlich die Zeit DE zur Zeit EF, was zu beweisen war.

Theorem II. Proposition II.

»Wenn ein Körper in gleichen Zeiten zwei Strecken zurücklegt, so verhalten sich diese Strecken wie die Geschwindigkeiten. Und wenn umgekehrt die Strecken wie die Geschwindigkeiten sich verhalten, so sind die Zeiten gleich.«

In derselben Figur 40 seien AB, BC in gleichen Zeiten zurückgelegt, und zwar AB mit der Geschwindigkeit DE und die Strecke BC mit der Geschwindigkeit EF. Ich behaupte, die Strecken AB und BC verhalten sich zu einander wie die Geschwindigkeiten DE und EF; nimmt man nämlich, wie oben geschah, beiderseits beliebige Vielfache der Strecken und der Geschwindigkeiten, also GB und JE, jenes aus AB-, dieses aus DE-Strecken, und ähnlich HB, KE, so wird in ganz analoger Weise wie vorhin geschlossen werden, dass die Vielfachen GB, JE entweder zugleich eben so viel oder weniger oder mehr betragen werden als die Strecken BH, EK; daher die Aufgabe gelöst ist. [2])

Theorem III. Proposition III.

»Bei ungleichen Geschwindigkeiten verhalten sich bei gleichen Strecken die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten.«

A
E D
C
B

Fig. 41.

A und B (Fig. 41) seien Geschwindigkeiten, A die grössere, B die kleinere, und beiden gemäss werde eine Strecke CD zurückgelegt. Ich behaupte, die Zeit, in welcher mit der Geschwindigkeit A die Strecke CD vollendet wird, verhalte sich zu der Zeit für Zurücklegung derselben Strecke CD mit der Geschwindigkeit B, wie die Geschwindigkeit B zur Geschwindigkeit A. Denn

wie A zu B, so verhalte sich CD zu CE; daher wird nach dem früheren Satze die Zeit, mit der die Geschwindigkeit A die Strecke CD überwindet, gleich sein der Zeit, in der CE mit B zurückgelegt wird; aber die Zeiten, in welchen mit B-Geschwindigkeit CE und CD überwunden werden, verhalten sich wie CE zu CD; folglich verhält sich die Zeit, mit welcher die Geschwindigkeit A die Strecke CD überwindet, zu der Zeit, mit welcher B dieselbe Strecke zurücklegt, wie CE zu CD, das heisst wie die Geschwindigkeiten B zu A, was zu beweisen war.

Theorem IV. Proposition IV.

»Wenn zwei gleichförmig bewegte Körper ungleiche Geschwindigkeit haben, so verhalten sich die in ungleichen Zeiten zurückgelegten Strecken wie das zusammengesetzte Verhältniss aus den Geschwindigkeiten und Zeiten.«

Zwei Körper E, F (Fig. 42) seien gleichförmig bewegt und die Geschwindigkeiten seien A und B; die Zeiten dagegen sollen

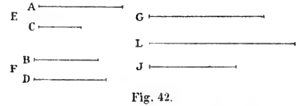


Fig. 42.

sich verhalten wie C zu D. Ich behaupte, dass die von E mit Geschwindigkeit A in der Zeit C zurückgelegte Strecke zu der von F mit Geschwindigkeit B in der Zeit D zurückgelegten Strecke sich verhalte, wie das Verhältniss von A zu B, multiplicirt mit dem Verhältniss von C zu D. Denn habe E mit der Geschwindigkeit A in der Zeit C die Strecke G überwunden, und sei G zu J wie A zu B; sei ferner J zu L wie die Zeiten C zu D: so weiss man, dass J die Strecke ist, durch welche F in derselben Zeit bewegt wird, wie E durch die Strecke G, da die Strecken G zu J wie die Geschwindigkeiten A zu B; und da J zu L wie die Zeiten C zu D, wenn J die Strecke, die der Körper F in der Zeit C zurücklegt, so wird L die Strecke sein, die der Körper F mit B-Geschwindigkeit in der Zeit D überwindet: aber das Verhältniss G zu L ist zusammengesetzt

aus den Verhältnissen G zu J und J zu L, oder aus den Verhältnissen der Geschwindigkeiten A zu B und der Zeiten C zu D; womit die Aufgabe gelöst ist.[3])

Theorem V. Proposition V.

»Wenn zwei Körper sich gleichförmig bewegen, mit ungleichen Geschwindigkeiten, und wenn auch die Strecken ungleich sind, so werden sich die Zeiten verhalten wie das Verhältniss der Strecken multiplicirt mit dem umgekehrten Verhältniss der Geschwindigkeiten.«

Es seien A, B (Fig. 43a) die beiden Körper, ihre Geschwindigkeiten verhalten sich wie V zu T, die zurückgelegten Strecken wie S zu R. Ich behaupte, die Bewegungszeiten der

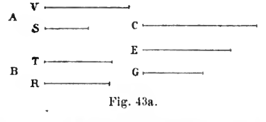


Fig. 43a.

Körper A und B verhalten sich zu einander wie das Verhältniss der Geschwindigkeiten T zu V multiplicirt mit dem Verhältniss der Strecken S zu R. Es gebrauche A die Zeit C und es sei C zu E wie T zu V. Da C die Zeit ist, in welcher A mit der Geschwindigkeit V die Strecke S überwindet, so wird, wenn C zu E wie die Geschwindigkeiten T zu V, auch E diejenige Zeit sein, in welcher der Körper B die Strecke S zurücklegt. Sei drittens das Verhältniss der Zeiten E zu G wie die Strecken S zu R; offenbar ist G die Zeit, in welcher B die Strecke R überwinden würde. Da nun C zu G gleich C zu E, multiplicirt mit E zu G (denn C verhält sich zu E umgekehrt wie die Geschwindigkeiten der Körper A, B, d. h. wie T zu V); aber E zu G wie die Strecken S zu R, so ist die Aufgabe gelöst.

Theorem VI. Proposition VI.

»Wenn zwei Körper sich gleichförmig bewegen, so ist das Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten gleich dem Verhältniss der

Strecken multiplicirt mit dem umgekehrten Verhältniss der Zeiten.«

A, *B* (Fig. 43b) sollen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, die Strecken sollen sich wie *V* zu *T* verhalten, die Zeiten aber wie *S* zu *R*. Ich behaupte, die Geschwindigkeiten von *A* und *B* verhalten sich wie *V* zu *T*, multiplicirt mit *R* zu *S*.

Es sei *C* die Geschwindigkeit, mit der *A* die Strecke *V* in der Zeit *S* überwindet, und es sei *C* zu *E* wie die Strecken *V*

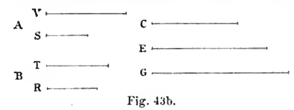


Fig. 43b.

zu *T*; es wird alsdann *E* die Geschwindigkeit sein, mit welcher der Körper *B* die Strecke *T* in derselben Zeit *S* überwindet: wenn nun *E* zu *G* wie die Zeiten *R* zu *S*, so wird *G* jene Geschwindigkeit sein, mit welcher der Körper *B* die Strecke *T* in der Zeit *R* zurücklegt. So haben wir also die Geschwindigkeit *C*, mit welcher der Körper *A* die Strecke *V* in der Zeit *S* überwindet, und die Geschwindigkeit *G*, mit welcher der Körper *B* die Strecke *T* in der Zeit *R* zurücklegt, und es ist *C* zu *G* gleich *C* zu *E* mal *E* zu *G*, aber *C* zu *E*, wie die Strecken *V* zu *T*, und *E* zu *G* wie die Zeiten *R* zu *S*; folglich ist die Aufgabe gelöst.

Salv. Soviel hat unser Autor über die gleichförmige Bewegung geschrieben. Wir gehen nun über zu einer feineren und durchaus neuen Betrachtung über die gleichförmig beschleunigte Bewegung, wie eine solche die fallenden schweren Körper vollführen. Hier folgt der Titel und die Einleitung.

Ueber die natürlich beschleunigte Bewegung.

Bisher war die gleichförmige Bewegung behandelt worden, jetzt gehen wir zur beschleunigten Bewegung über. Zunächst muss eine der natürlichen Erscheinung genau entsprechende Definition gesucht und erläutert werden. Obgleich es durchaus gestattet ist, irgend eine Art der Bewegung beliebig zu ersinnen

und die damit zusammenhängenden Ereignisse zu betrachten (wie z. B. Jemand, der Schraubenlinien oder Conchoiden aus gewissen Bewegungen entstanden gedacht hat, die in der Natur gar nicht vorkommen mögen, doch aus seinen Voraussetzungen die Haupteigenschaften wird erschliessen können), so haben wir uns dennoch entschlossen, diejenigen Erscheinungen zu betrachten, die bei den frei fallenden Körpern in der Natur vorkommen, und lassen die Definition der beschleunigten Bewegung zusammenfallen mit dem Wesen einer natürlich beschleunigten Bewegung. Das glauben wir schliesslich nach langen Ueberlegungen als das Beste gefunden zu haben, vorzüglich darauf gestützt, dass das, was das Experiment den Sinnen vorführt, den erläuterten Erscheinungen durchaus entspreche. Endlich hat uns zur Untersuchung der natürlich beschleunigten Bewegung gleichsam mit der Hand geleitet die aufmerksame Beobachtung des gewöhnlichen Geschehens und der Ordnung der Natur in allen ihren Verrichtungen, bei deren Ausübung sie die allerersten einfachsten und leichtesten Hülfsmittel zu verwenden pflegt; denn wie ich meine, wird Niemand glauben, dass das Schwimmen oder das Fliegen einfacher oder leichter zu Stande gebracht werden könne als durch diejenigen Mittel, die die Fische und die Vögel mit natürlichem Instinct gebrauchen. Wenn ich daher bemerke, dass ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum soll ich nicht glauben, dass solche Zuwüchse in allereinfachster, Jedermann plausibler Weise zu Stande kommen? Wenn wir genau aufmerken, werden wir keinen Zuwachs einfacher finden, als denjenigen, der in immer gleicher Weise hinzutritt. Das erkennen wir leicht, wenn wir an die Verwandtschaft der Begriffe der Zeit und der Bewegung denken: denn wie die Gleichförmigkeit der Bewegung durch die Gleichheit der Zeiten und Räume bestimmt und erfasst wird (denn wir nannten diejenige Bewegung gleichförmig, bei der in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt wurden), so können wir durch ebensolche Gleichheit der Zeittheile die Geschwindigkeitszunahmen als einfach zu Stande gekommen erfassen: mit dem Geiste erkennen wir diese Bewegung als einförmig und in gleichbleibender Weise stetig beschleunigt, da in irgend welchen gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszunahmen sich addiren. So dass, wenn man vom Anfangspunkte der Zeit an ganz gleiche Zeittheilchen nimmt von der Ruhelage aus, die Fallstrecke hindurch, die Geschwindigkeit des ersten

Zeittheils mitsammt dem Zuwachs des zweiten, auf den doppelten Werth hinansteigt: in drei Zeittheilchen ist der Werth der dreifache, in vieren der vierfache vom ersten. Deutlicher zu reden, wenn der Körper seine Bewegung nach dem ersten Zeittheile in gleicher Weise mit der erlangten Geschwindigkeit fortsetzte, so würde er halb so langsam gehen, als wenn in zwei Zeittheilchen die Geschwindigkeit erzeugt worden wäre; und so werden wir nicht fehlgehen, wenn wir die Vermehrung der Geschwindigkeit (intentionem velocitatis) der Zeit entsprechen lassen; hieraus folgt die Definition der Bewegung, von welcher wir handeln wollen. Gleichförmig oder einförmig beschleunigte Bewegung nenne ich diejenige, die von Anfang an in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszuwüchse ertheilt.

Sagr. Ich würde mich durchaus gegen diese oder gegen jede andere Definition, die irgend ein Schriftsteller ersonnen hätte, sträuben, weil sie alle willkürlich sind; ich darf meinen Zweifel aufrecht erhalten, ohne Jemand zu nahe zu treten, und fragen, ob solch eine völlig abstract aufgestellte Definition auch zutreffe, und ob sie bei der natürlich beschleunigten Bewegung statthabe. Da es scheint, dass unser Autor uns versichert, dass das, was er definirt, als natürliche Bewegung der schweren Körper sich offenbare, so würde ich gern einige Bedenken gehoben sehen, die mich verwirren; nachher könnte ich mich mit um so grösserer Aufmerksamkeit den Demonstrationen hingeben.

Salv. Wohlan, mögen Sie, mein Herr, und auch Herr *Simplicio* die Schwierigkeiten hervorheben; ich glaube, es werden dieselben sein, deren ich mich selbst noch entsinne, als ich zum ersten Male diese Abhandlung sah, und die theils vom Autor selbst unterdrückt wurden, theils durch eigenes Nachdenken schwanden.

Sagr. Denke ich mir einen schweren Körper aus völliger Ruhe in die Bewegung eintreten, und zwar so, dass die Geschwindigkeit vom ersten Zeittheil an so wächst, wie die Zeit; und habe der Körper in acht Pulsschlägen acht Geschwindigkeitsgrade erlangt, von welchen im vierten Pulsschlage er nur deren vier hatte, in dem zweiten zwei, im ersten einen, so würde, da die Zeit ohne Ende theilbar ist, daraus folgen, dass, wenn wir die vorangehenden Geschwindigkeiten in entsprechendem Verhältniss vermindert denken wollten, es keine noch so kleine Geschwindigkeit, oder besser keine noch so grosse Langsamkeit gäbe, in welcher der Körper sich nicht befunden haben müsste

nach seinem Abgange aus der Ruhe. Wenn er mit der in vier Pulsschlägen erlangten Geschwindigkeit, wenn sie sich gleich bliebe, in einer Stunde zwei Meilen, und mit der in zwei Pulsschlägen erlangten Geschwindigkeit er eine Meile in der Stunde zurückgelegt hätte, so muss man behaupten, dass in Zeittheilchen, die sehr nahe seiner ersten Erregung liegen, die Bewegung so langsam gewesen sein muss, dass (wenn er diese Geschwindigkeit beibehielte) er eine Meile weder in einer Stunde, noch in einem Tage, noch in einem, noch in tausend Jahren, und selbst in grösserer Zeit nicht einmal einen Fingerbreit zurückgelegt hätte: eine Erscheinung, der wir schwer mit unserer Phantasie folgen können, da unsere Sinne uns lehren, dass ein schwerer Körper sofort grosse Geschwindigkeit erlangt.

Salv. Ebendieselbe Schwierigkeit hat mir Anfangs zu denken gegeben, aber bald habe ich sie überwunden; und zwar gelang mir das durch denselben Versuch, den Ihr soeben vorbrachtet. Ihr sagtet, dass der Körper, alsobald nachdem er die Ruhelage verlassen, eine sehr merkliche Geschwindigkeit habe; ich sage nun, derselbe Versuch lehrt mich die ersten Anläufe eines noch so schweren Körpers als sehr langsam erkennen. Setzt einen schweren Körper auf eine Unterlage; diese giebt nach, bis sie gedrückt wird mit dem vollen Gewicht; nun ist es klar, dass, wenn wir den Körper eine Elle hoch heben oder zwei, und wenn wir ihn auf dieselbe Unterlage fallen lassen, beim Aufprallen ein neuer und stärkerer Druck hervorgerufen werden wird, als vorhin allein durch den Druck; und die Wirkung wird vom fallenden Körper verursacht sein, d. h. von seinem Gewichte im Verein mit der im Fall erlangten Geschwindigkeit, eine Wirkung, die um so grösser sein wird, von je grösserer Höhe der Körper herabfällt, d. h. je grösser die Geschwindigkeit beim Anfprallen ist. Welches nun auch die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers sei, wir können dieselbe mit Sicherheit erschliessen aus der Art und Intensität des Stosses. Aber sagt mir, meine Herren, wenn ein Block auf einen Pfahl aufschlägt aus 4 Ellen Höhe herabfallend, und letzteren etwa vier Finger tief in die Erde treibt, so wird derselbe, von zwei Ellen Höhe fallend, ihn weniger antreiben, und noch weniger von einer Elle Höhe, desgleichen von einer Spanne Höhe; und wenn endlich der Block nur einen Finger breit fällt, was wird er mehr thun, als wie wenn man ohne Stoss ihn niedergesetzt hätte? gewiss recht wenig und völlig unmerkbar wäre die Wirkung, wenn der Block um eines Blattes Dicke erhoben worden wäre. Wenn nun

die Wirkung des Stosses von der erlangten Geschwindigkeit abhängt, wer wird alsdann zweifeln, dass die Bewegung sehr langsam und mehr als sehr klein die Geschwindigkeit sei, bei welcher die Wirkung unmerklich ist? Man erkennt hier die Macht der Wahrheit, da derselbe Versuch, der eine gewisse Ansicht beim ersten Anblick zu beweisen schien, bei genauerer Betrachtung uns das Gegentheil lehrt. Aber auch ohne Berufung auf solch einen Versuch (der wohl sehr überzeugend ist) scheint mir, kann man durch einfache Ueberlegung solch eine Wahrheit erkennen. Denken wir uns einen schweren Stein in der Luft in Ruhelage; man nimmt ihm die Stütze und versetzt ihn in Freiheit; da er schwerer als Luft ist, fällt er hinab, und nicht mit gleichförmiger Bewegung, sondern anfänglich langsam, dann stetig beschleunigt; und da Geschwindigkeit ohne Grenze vermehrt und vermindert werden kann, was sollte mich zur Annahme bringen, dass solch ein Körper, der mit unendlich grosser Langsamkeit beginnt (denn so ist die Ruhe beschaffen), weit eher ganz plötzlich zehn Geschwindigkeitsgrade erlange, als vier, oder eher diese als eine von zwei Graden, oder von einem, oder einem halben, oder einem hundertstel? und überhaupt irgend einen der noch vorhandenen unendlich vielen kleineren Geschwindigkeitsgrade? Merket auf, ich bitte. Ich glaube nicht, dass Ihr mir widerstreben werdet zuzugeben, dass die Erlangung der Geschwindigkeit des fallenden Steines vom Zustand der Ruhe an in derselben Ordnung vor sich gehen könne, wie die Verminderung und der Verlust jener Geschwindigkeitsgrade, wenn er von einer antreibenden Kraft in die Höhe geschleudert worden wäre bis zu derselben Höhe; aber wenn dem so ist, so erscheint es mir unzweifelhaft, dass bei der Verminderung der Geschwindigkeit des aufsteigenden Steines, da sie schliesslich ganz vernichtet wird, derselbe nicht früher zur Ruhe kommen könne, als bis er alle Grade von Langsamkeit durchgemacht hat.

Simpl. Aber wenn die Grade immer grösserer und grösserer Langsamkeit unendlich an Zahl sind, dann werden sie niemals sämmtlich erschöpft sein; daher solch ein aufsteigender schwerer Körper niemals zur Ruhe gelangen könnte, sondern sich unendlich lange wird bewegen müssen, dabei immer langsamer werdend, was denn doch nicht in Wirklichkeit zutrifft.

Salv. Es würde zutreffen, Herr *Simplicio*, wenn der Körper einige Zeit hindurch sich in jedem Geschwindigkeitsgrade bewegen würde; allein er geht über einen jeden Werth sofort hinaus, ohne mehr als einen Augenblick bei demselben zu

verweilen, und da in einem jeden auch noch so kleinen Zeittheilchen es unendlich viele Augenblicke giebt, so sind diese letzteren recht wohl hinreichend, den unendlich vielen Graden von verminderter Geschwindigkeit zu entsprechen. Dass zudem ein solch aufsteigender Körper keine endliche Zeit hindurch bei irgend einem Geschwindigkeitswerthe beharrt, kann auch folgendermaassen gezeigt werden: gesetzt es könnte eine endliche Zeit hierfür angegeben werden, so würde sowohl in dem ersten Augenblicke einer solchen Zeit, als auch in dem letzten der fragliche Körper ein und denselben Geschwindigkeitswerth haben und von diesem zweiten Werthe ganz ebenso hinauf geschafft werden, wie vom ersten zum zweiten, und aus demselben Grunde würde er vom zweiten zum dritten Werthe gelangen, und endlich in gleichförmiger Bewegung bis ins Unendliche verharren.

Sagr. Auf Grund dieser Ueberlegung, scheint mir, könnte man eine recht zutreffende Lösung der von Philosophen erörterten Frage gewinnen, welches die Ursache der Beschleunigung bei der natürlichen Bewegung schwerer Körper sei. Denn ich finde, dass beim emporgeworfenen Körper die anfänglich mitgetheilte Kraft (virtu) stetig abnimmt, und den Körper fortwährend erhebt, bis sie gleich der entgegenwirkenden Schwerkraft geworden ist, und nachdem beide ins Gleichgewicht gelangt sind, der Körper aufhört zu steigen und in den Zustand der Ruhe gelangt, in welchem der mitgetheilte Schwung nicht anders vernichtet ist, als in dem Sinne, dass der Ueberschuss verzehrt ist, der Anfangs das Gewicht des Körpers übertraf und mittelst dessen der Aufstieg zu Stande kam. Indem nun die Verminderung dieses fremden Antriebes fortdauert, und indem späterhin das Uebergewicht zu Gunsten der Schwere des Körpers eintritt, beginnt das Niedersinken, aber sehr langsam im Gegensatz zum mitgetheilten Antriebe, der zum grossen Theile dem Körper noch verbleibt; da derselbe aber stetig vermindert wird, da in immer höherem Maasse die Schwere überwiegt, so entsteht hierdurch die stetige Beschleunigung der Bewegung.

Simpl. Der Gedanke ist scharfsinnig, aber eher fein gedacht als stichhaltig (saldo). Denn was da zutreffend erscheint, entspricht nur jener natürlichen Bewegung, der eine heftige Bewegung voranging, und bei welcher noch ein bedeutender Theil des äusseren Antriebes beharrt; wo aber kein solcher Rest vorhanden ist, der Körper vielmehr von einer länger bestehenden Ruhe aus sich bewegt, da hat alle jene Ueberlegung keine Geltung (cessa la forza).

Sagr. Ich glaube, Ihr seid im Irrthnm, und die von Euch beliebte Unterscheidung ist überflüssig, oder besser, sie ist nichtig. Denn sagt mir, ob nicht im aufgeworfenen Körper bald viel, bald wenig Antrieb vorhanden sein kann, so dass er 100 Ellen aufsteigen kann, oder auch 20, 4 oder eine?

Simpl. Das ist gewiss.

Sagr. Es wird also die mitgetheilte Kraft auch so wenig den Widerstand der Schwere überragen können, dass der Körper nur einen Finger breit aufsteigt; und endlich kann der mitgetheilte Antrieb nur so gross sein, dass er genau gleich ist dem Widerstand der Schwere, so dass der Körper nnn nicht mehr aufsteigt, sondern blos unterstützt bleibt. Wenn Ihr also einen Stein haltet, was thut Ihr anderes, als ihn so stark empor anzutreiben, als die Schwerkraft ihn hinabzieht? Und unterhaltet Ihr nicht immerfort dieselbe Auftriebskraft so lange, als Ihr den Körper in der Hand haltet? Nimmt sie vielleicht in dieser langen Zeit ab? Diese Unterstütznng aber, die den Stein am Fallen hindert, was macht es aus, ob Eure Hand dieselbe leistet, oder ein Tisch, oder ein Seil, an dem er angehängt ist? Doch gewiss gar nichts. Also folgert daraus, Herr *Simplicio*, dass die Frage, ob eine kurze oder lange Ruhezeit dem Falle vorangeht, oder eine nur augenblickliche, gar keinen Unterschied bedingt, denn der Stein bleibt in Ruhe, so lange der Antrieb seiner Schwere entgegen wirkt, in dem Betrage, wie er zum Hervorbringen der Ruhe nöthig war.

Salv. Es scheint mir nicht günstig, jetzt zu untersuchen, welches die Ursache der Beschleunigung der natürlichen Bewegung sei, worüber von verschiedenen Philosophen verschiedene Meinungen vorgeführt worden sind: einige führen sie auf die Annäherung an das Centrum zurück, andere darauf, dass immer weniger Theile des Körpers auseinander gehen wollen; wieder andere auf eine gewisse Vertreibung des umgebenden Mittels, welches hinter dem fallenden Körper sich wieder schliesst und den Körper antreibt und von Stelle zu Stelle verjagt; alle diese Vorstellungen und noch andere müssen geprüft werden nnd man wird wenig Gewinn haben. Für jetzt verlangt unser Autor nicht mehr, als dass wir einsehen, wie er uns einige Eigenschaften der beschleunigten Bewegung nntersucht nnd erläutert (ohne Rücksicht auf die Ursache der letzteren), so dass die Momente seiner Geschwindigkeit vom Anfangszustande der Ruhe aus stets anwachsen jenem einfachsten Gesetze gemäss, der Proportionalität mit der Zeit, d. h. so, dass in gleichen Zeiten

gleiche Geschwindigkeitsanwüchse statt haben. Sollte sich zeigen, dass die später zu besprechenden Erscheinungen mit der Bewegung der beschlennigt fallenden Körper übereinstimmen, so werden wir annehmen dürfen, dass unsere Definition den Fall der schweren Körper nmfasst und dass es wahr sei, dass ihre Beschlennigung proportional der Zeit sei, so lange die Bewegung andauert.

Sagr. So viel ich gegenwärtig verstehe, hätte man vielleicht deutlicher ohne den Grundgedanken zu ändern so definiren können: Einförmig beschleunigte Bewegung ist eine solche, bei welcher die Geschwindigkeit wächst proportional der zurückgelegten Strecke; so dass z. B. nach einer Fallstrecke von vier Ellen die Geschwindigkeit doppelt so gross sei, als wenn er durch zwei Ellen gesunken wäre, und diese das doppelte von der bei einer Elle Fallstrecke erlangten Geschwindigkeit. Denn ohne Zweifel wird ein von sechs Ellen herabfallender Körper den doppelten Antrieb durch Stoss hervorrnfen im Vergleich zu dem von drei Ellen Höhe herabkommenden, und den dreifachen Antrieb im Vergleiche zur Fallhöhe von zwei Ellen, den sechsfachen zu der von einer Elle Höhe.

Salv. Es ist mir recht tröstlich, in diesem Irrthnm einen solchen Genossen gehabt zu haben; überdies muss ich Euch sagen, dass Eure Ueberlegung so wahrscheinlich zu sein scheint, dass selbst unser Autor eine Zeitlang, wie er mir selbst gesagt hat, in demselben Irrthum befangen war. Was mir aber am meisten Staunen erregt hat, war die Thatsache, dass zwei sehr wahrscheinlich klingende Behauptungen, die mir von Vielen, denen ich sie vorlegte, ohne weiteres zugestanden waren, — mit nur vier ganz schlichten Worten als ganz falsch und ganz unmöglich erwiesen wurden.

Simpl. Wahrlich, auch ich würde jenen Annahmen beipflichten; der fällende Körper erlangt im Falle seine Kräfte, indem die Geschwindigkeit proportional der Fallstrecke anwächst, und das Moment des Stosses ist doppelt so gross, wenn die Fallhöhe die doppelte: diesen Sätzen kann man ohne Widerstreben beipflichten.

Salv. Und dennoch sind sie dermaassen falsch und unmöglich, wie wenn jede Bewegung instantan wäre. Folgendes ist die allerdeutlichste Erläuterung. Wenn die Geschwindigkeiten proportional den Fallstrecken wären, die zurückgelegt worden sind oder zurückgelegt werden sollen, so werden solche Strecken in gleichen Zeiten zurückgelegt; wenn also die Geschwindigkeit,

mit welcher der Körper vier Ellen überwand, das doppelte der Geschwindigkeit sein solle, mit welcher die zwei ersten Ellen zurückgelegt wurden, so müssten die zu diesen Vorgängen nöthigen Zeiten einander ganz gleich sein; aber eine Ueberwindung von vier Ellen in derselben Zeit wie eine von zwei Ellen kann nur zu Stande kommen, wenn es eine instantane Bewegung giebt; wir sehen dagegen, dass der Körper Zeit zum Fallen gebraucht, und zwar weniger für zwei als für vier Ellen Fallstrecke; also ist es falsch, dass die Geschwindigkeiten proportional der Fallstrecke wachsen. Auch die andere Behauptung kann ebenso deutlich als irrig erwiesen werden. Der stossende Körper ist in beiden Fällen derselbe; die Differenz des Stossmomentes kann daher nur auf den Unterschied der Geschwindigkeit bezogen werden. Wenn der von doppelter Höhe fallende Körper einen Stoss von doppeltem Moment erzeugt, so müsste er mit doppelter Geschwindigkeit aufprallen; aber die doppelte Geschwindigkeit überwindet die doppelte Strecke in derselben Zeit, während wir die Fallzeit mit der Höhe zunehmen sehen.

Sagr. Mit zu viel Evidenz und Gewandtheit erklärt Ihr uns die verborgensten Dinge; diese Fertigkeit macht, dass wir die Erkenntniss weniger schätzen, als wir damals zu thun glaubten, als wir noch der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils huldigten. Die mit wenig Mühe errungenen allgemeinen Kenntnisse würdigt man wenig im Vergleich zu denen, die mit langen unerklärbaren Vorstellungen umgeben sind.

Salv. Es wäre sehr traurig, wenn denjenigen, welche kurz und deutlich die Irrthümer allgemein für wahr gehaltener Sätze aufdecken, statt Beifall nur Missachtung gezollt würde; aber eine bittere und lästige Empfindung wird bei denjenigen erweckt, die auf demselben Studiengebiet sich jedem Anderen gewachsen glauben und dann erkennen, dass sie das als richtige Schlussfolgerung zugelassen haben, was später von einem Anderen mit kurzer leichter Ueberlegung aufgedeckt und als irrig gekennzeichnet wurde. Ich möchte solch eine Empfindung nicht Neid nennen, der gewöhnlich in Hass und Zorn gegen den Aufdecker der Irrthümer ausartet, viel eher wird es eine Sucht und ein Verlangen sein, altgewordene Irrthümer lieber aufrecht zu erhalten, als zuzugestehen dass neuentdeckte Wahrheiten vorliegen, und dieses Verlangen verführt die Leute oft, gegen vollkommen von ihnen selbst erkannte Wahrheiten zu schreiben, blos um die Meinung der grossen und wenig intelligenten Menge gegen das Ansehen des Anderen aufzustacheln. Von solchen

falschen Lehren und leichtfertigen Widerlegungen habe ich oft unseren Academiker reden gehört, nnd ich habe sie mir wohl gemerkt.

Sagr. Sie sollten uns dieselben nicht vorenthalten, sondern gelegentlich mittheilen, selbst wenn wir in diesem Interesse eine besondere Zusammenknnft vereinbaren müssten.

Unser Gespräch wieder anfnehmend, will mir scheinen, dass wir bis jetzt die Definition der gleichförmig beschlennigten Bewegung festgestellt haben, auf welche die folgenden Untersuchungen sich beziehen, nämlich:

Die gleichförmig oder einförmig beschleunigte Bewegung ist eine solche, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitsmomente hinznkommen.

Salv. Nach Feststellung dieser Definition stellt nnser Autor eine Voraussetznng als wahr auf, nämlich:

Die Geschwindigkeitswerthe, welche ein und derselbe Körper bei verschiedenen Neigungen einer Ebene erlangt, sind einander gleich, wenn die Höhen dieser Ebenen einander gleich sind.

Der Autor nennt »Höhe einer geneigten Ebene« das Loth, welches vom höchsten Punkte der Ebene auf ein und dieselbe horizontale Ebene gefällt werden kann, welche durch die untersten Punkte der Ebene gelegt wird. Wenn also BA parallel dem Horizont (Fig. 44), über welchem die geneigten Ebenen CA, CD sich erheben, so wird das Loth CB, senkrecht zur Horizontalen BA, die Höhe beider Ebenen CA, CD genannt. Er nimmt an, dass der längs CA, CD sich bewegende Körper, wenn er in A und D anlangt, gleiche Geschwindigkeit habe, weil sie gleiche Höhe CB haben. Und zwar ist die Geschwindigkeit dieselbe, wie der Körper sie bei freiem Falle von C aus in B erlangt hätte.

C

A D B

Fig. 44.

Sagr. Wahrlich, diese Annahme scheint mir dermaassen wahrscheinlich, dass sie ohne Controverse zugestanden werden müsste, vorausgesetzt immer, dass alle zufälligen und äusseren Störungen fortgeränmt seien, und dass die Ebenen durchaus fest nnd glatt seien, nnd der Körper von vollkommenster Rundnng sei, kurz Körper und Ebene frei von jeder Rauhigkeit seien. Wenn alle Hindernisse fortgeräumt sind, sagt mir mein natürlicher Verstand, dass ein schwerer, vollkommen runder Stab längs den Linien CA, CD, CB mit gleichen Geschwindigkeiten in A, D, B ankommen würde.

Salv. Ihr findet das sehr wahrscheinlich; allein über die Wahrscheinlichkeit hinaus will ich Euch so sehr die Argumente vermehren, dass Ihr es fast für einen zwingenden Beweis anerkennen sollt. Es stelle dieses Blatt eine auf der Horizontalebene errichtete Wand dar, und an einem in derselben befestigten Nagel hänge eine Kugel aus Blei von 1 oder 2 Unzen Gewicht, befestigt an einem dünnen Faden AB (Fig. 45) von 2 oder 3 Ellen Länge; auf der Wand verzeichne man eine horizontale Linie DC, senkrecht zum Faden AB, welcher ungefähr 2 Finger breit von der Wand abstehen mag. Bringt man den Faden AB mit der Kugel nach AC, und lässt man die Kugel los, so wird dieselbe fallend den Bogen CBD beschreiben, indem sie so schnell den Punkt B durcheilt, dass sie um den Bogen BD ansteigt fast bis zur Horizontalen CD, indem sie um ein sehr kleines Stück zurückbleibt, da in Folge des Widerstandes der Luft und des Fadens sie an der präcisen Wiederkehr gehindert wird. Hieraus können wir sicher schliessen, dass die im Punkte B erlangte Geschwindigkeit der Kugel beim Hinabfallen durch den Bogen CB genüge, um den Anstieg um einen gleich grossen Bogen BD zu bewirken zu gleicher Höhe; nach häufiger Anstellung dieses Versuches wollen wir in der Wand bei E einen Nagel anbringen oder in F, 5 oder 6 Finger breit nach vorne, damit der Faden AC, wenn er mit der Kugel nochmals nach CB gelangt und den Punkt B erreicht hat, beim Nagel E festgehalten, und die Kugel gezwungen wird, den Bogen BG zu beschreiben um den Mittelpunkt E herum, wobei wir erkennen werden, was ebendieselbe Geschwindigkeit leistet, die vorhin denselben Körper durch den Bogen BD hinauf bis zum Horizonte CD förderte. Nun, meine Herren, werden Sie mit Wohlgefallen bemerken, dass die Kugel im Punkte G wiederum den Horizont erreicht, und ebendasselbe geschieht, wenn das Hemmniss sich tiefer befände, wie in F, wobei die Kugel den Bogen BJ beschreibt, den Aufstieg stets im Horizonte CD beendend, und wenn der hemmende Nagel so tief stünde, dass der Rest des Fadens nicht mehr den Horizont CD erreichen könnte (was offenbar einträte, wenn er näher zu B als zum

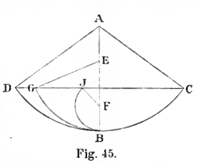


Fig. 45.

Durchschnitt von AB mit CD läge), so würde der Faden den Nagel umschlingen. Dieser Versuch lässt keinen Zweifel aufkommen hinsichtlich der Wahrheit des aufgestellten Satzes. Denn, da die Bögen CB, DB einander gleich sind und symmetrisch (similmente) liegen, so wird das beim Sinken durch den Bogen CB erlangte Moment ebenso gross sein, wie die Wirkung durch den Bogen DB; aber das in B erlangte, durch CB hindurch erzeugte Moment vermag denselben Körper durch den Bogen BD zu heben; folglich wird auch das beim Fallen durch DB hervorgerufene Moment gleich sein demjenigen, welches denselben Körper vorher von B bis D zu fördern vermochte, sodass allgemein jedes beim Fallen erzeugte Moment gleich demjenigen ist, welches den Körper durch denselben Bogen zu erheben im Stande ist: aber alle Momente, die den Körper durch die Bögen BD, BG, BJ zu heben vermochten, sind einander gleich, da sie stets durch das Fallen durch CB entstanden waren, wie der Versuch es lehrt: folglich sind auch alle Momente, die durch die Senkung durch die Bögen DB, GB, JB hervorgerufen werden, einander gleich.

Sagr. Diese Erläuterung erscheint so folgerichtig und der Versuch ist so sehr geeignet, die Behauptung zu bewähren, dass die letztere so gut wie bewiesen erscheinen muss.

Salv. Ich denke, Herr *Sagredo*, wir werden uns darüber keine Sorge machen, dass wir unseren Satz anwenden wollen auf die Bewegung längs ebenen Flächen, und nicht längs gekrümmten, auf welchen die Beschleunigung in ganz anderen Beträgen zunimmt, als wie wir sie auf ebenen Flächen annehmen. Wenn also auch das Experiment uns lehrt, dass der Fall durch den Bogen CB dem Körper solch einen Impuls ertheilt, dass derselbe auf dieselbe Höhe gehoben werden kann durch irgend einen Bogen BD, BG, BJ, so können wir nicht mit gleicher Evidenz zeigen, dass ebendasselbe geschehe, wenn eine durchaus vollkommene Kugel längs ebener Flächen hinabfiele, die geneigt sind wie die Sehnen eben dieser Bögen; im Gegentheil ist es wahrscheinlich, dass, da diese ebenen Flächen Winkel bilden im Endpunkte B, die Kugel nach dem Fall längs der Sehne CB einen Widerstand erleidet an der ansteigenden Ebene längs den Sehnen BD, BG, BJ, daher ein Theil des Impulses beim Anprall verloren gehen müsste, sodass der Anstieg nicht mehr bis zum Horizonte CD erfolgen könnte. Schafft man das Hinderniss fort, welches den Versuch beeinträchtigt, so scheint es mir wohl verständlich, dass der Impuls (der in sich den Effekt

der gesammten Fallkraft birgt), hinreichen müsste, den Körper auf dieselbe Höhe zn erheben. Wollen wir nunmehr dieses gelten lassen als Postnlat; die absolute Richtigkeit wird uns später einleuchten, wenn wir die Folgerungen aus solcher Hypothese eintreffen und genau mit dem Versuch übereinstimmen sehen. Nachdem der Antor dieses eine Princip voransgesetzt, geht er zu strengen Schlnssfolgerungen über, deren erste hier folge.

Theorem I. Propos. I.

»Die Zeit, in welcher irgend eine Strecke von einem Körper von der Ruhelage aus mittelst einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zurückgelegt wird, ist gleich der Zeit, in welcher dieselbe Strecke von demselben Körper zurückgelegt würde mittelst einer gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich wäre dem halben Betrage des höchsten und letzten Geschwindigkeitswerthes bei jener ersten gleichförmig beschleunigten Bewegung.«[4])

Es stelle AB (Fig. 46) die Zeit dar, in welcher der Körper aus der Ruhelage C bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die Strecke CD zurücklegt; man verzeichne die während der Zeit AB in einzelnen Zeittheilchen allmählich vermehrten Geschwindigkeitsbeträge, zuletzt EB (senkrecht auf AB): man ziehe AE sowie mehrere zu EB parallele äqnidistante Linien, so werden diese die wachsenden Geschwindigkeitswerthe darstellen. Man halbire EB in F, ziehe die Parallelen FG zu BA und GA zu FB. Das Parallelogramm $AGFB$ wird dem Dreieck AEB gleich sein, da die Seite GF die Linie AE halbirt im Punkte J: denn wenn die Parallelen im Dreieck AEB bis nach GJF verlängert werden, so wird die Summe aller Parallelen, die im Viereck enthalten sind, gleich denen im Dreieck AEB sein; denn was in JEF liegt, ist gleich dem in GJA Enthaltenen; während das Trapez $AJFB$ beiden gemeinsam ist. Da ferner einem jeden Zeittheilchen innerhalb AB eine Linie entspricht, und alle Punkte von AB, von denen ans in AEB Parallelen gezogen wurden, die wachsenden Geschwindigkeitswerthe darstellen, während dieselben Parallelen innerhalb des Parallelogramms e b e n s o v i e l Werthe gleichförmiger Geschwindigkeit abbilden: so ist es klar, dass die sämmtlichen Geschwindigkeitsmomente

C G A J E F B D

Fig. 46.

bei der beschleunigten Bewegung dargestellt sind in den wachsenden Parallellinien von AEB, und bei der gleichförmigen Bewegung in denjenigen des Parallelogramms GB: denn was an Bewegungsmomenten in der ersten Zeit der Bewegung fehlt (d. h. die Werthe von AGJ), wird ersetzt durch die Parallelen in JEF. Folglich werden zwei Körper gleiche Strecken in ein und derselben Zeit zurücklegen, wenn der eine aus der Ruhe gleichförmig beschleunigt sich bewegt, der andere mit gleichförmiger Geschwindigkeit gleich dem halben Betrage des bei beschleunigter Bewegung erreichten Maximalwerthes, w. z. b. w.

Theorem II. Propos. II.

»Wenn ein Körper von der Ruhelage aus gleichförmig beschleunigt fällt, so verhalten sich die in gewissen Zeiten zurückgelegten Strecken wie die Quadrate der Zeiten.«[5]

Man stelle den Verlauf der Zeit von einem Augenblick A an dar durch die Linie AB (Fig. 47), in welcher zwei Theilchen AD, AE gedacht werden mögen; sei ferner HJ die Strecke, die der Körper aus der Ruhelage H zurücklegt mit gleichförmiger Beschleunigung; sei ferner HL zurückgelegt im ersten Zeittheilchen AD, dagegen HM in der Zeit AE. Ich behaupte, MH verhalte sich zur Strecke HL, wie die Quadrate der Zeiten EA und AD. Man verzeichne AC unter irgend einem Winkel geneigt gegen AB; aus den Punkten D, E ziehe man Parallelen DO, EP, und sei DO die Endgeschwindigkeit (maximus gradus velocitatis) im Augenblick D; desgleichen PE die Endgeschwindigkeit im Augenblicke E am Ende der Zeit AE. Da oben bewiesen worden ist, dass die zurückgelegten Strecken bei gleichförmig beschleunigter Bewegung und bei gleichförmiger Bewegung mit halber Endgeschwindigkeit gleich sind, so ist es klar, dass die Strecken MH, LH ebenso gross sind, wie sie bei gleichförmiger Bewegung mit Geschwindigkeiten $\frac{1}{2}PE$ und $\frac{1}{2}OD$ in Zeiten EA, DA zurückgelegt worden wären. Wenn man nun zeigen könnte, dass diese Strecken MH, LH sich verhalten wie die Quadrate von EA, DA, so ist der Satz bewiesen. Aber im vierten Satze des ersten Buches ward gezeigt, dass bei gleichförmiger Bewegung die Strecken ein zusammen-

Fig. 47.

gesetztes Verhältniss haben aus dem Verhältniss der Geschwindigkeiten und dem Verhältniss der Zeiten: hier aber verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Zeiten (denn wie $\frac{1}{2} PE$ zu $\frac{1}{2} OD$, oder wie PE zu OD, so verhält sich AE zu AD), folglich verhalten sich die Strecken wie die Quadrate der Zeiten, w. z. b. w.

Hieraus erhellt, dass die Strecken sich verhalten, wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten: d. h. von PE und OD, da PE zu OD wie EA zu DA.

Zusatz I.

»Aus dem Vorhergehenden folgt, dass, wenn vom Anfangspunkte der Bewegung an gleiche Zeitgrössen genommen werden, wie AD, DE, EF, FG, in denen die Fallstrecken HL, LM, MN, NJ zurückgelegt werden, die letzteren sich wie die Reihe der ungeraden Zahlen, also wie 1, 3, 5, 7 verhalten. Denn so gross ist das Verhältniss der Excesse der Quadrate von Linien, die gleichviel von einander differiren, und deren Zuwüchse gleich sind der kleinsten aller Linien: mit anderen Worten, der Unterschied der Quadrate aller Zahlen von 1 an. Während also die Geschwindigkeit wie die einfache Zahlenreihe in gleichen Zeiten anwächst, werden die in diesen einzelnen Zeiten zurückgelegten Strecken wie die Reihe der ungeraden Zahlen sich verhalten.«

Sagr. Bitte, unterbrechet ein wenig die Lektüre, weil ich einen wunderlichen Einfall habe, den ich mit einer Zeichnung erläutern möchte. Mit der Linie AJ (Fig. 48) bezeichne ich die Zeit vom Augenblicke A an. Unter einem beliebigen Winkel trage ich die Gerade AF bei A an, vereinige die Endpunkte J, F, halbire AJ in C und ziehe CB parallel JF. Nun betrachte ich CB als Maximum der Geschwindigkeit, die von A an gleichförmig gewachsen ist bis BC, sodass das Dreieck ABC entsteht (demgemäss die Geschwindigkeit anwächst wie die Zeit); ich nehme auf Grund unserer Erläuterungen ohne Weiteres an, dass die bei beschleunigter Bewegung zurückgelegte Strecke gleich sei der bei gleichbleibender Geschwindigkeit, deren Betrag EC gleich $\frac{1}{2} BC$ wäre. Nachdem nun ferner der Körper in C die Geschwindigkeit BC erlangt hat, so würde er,

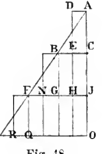


Fig. 48.

wenn er diese letztere behielte ohne neue Beschleunigung, in dem folgenden Zeittheile CJ den doppelten Weg zurücklegen im Vergleich zu dem, den er in der ebenso grossen Zeit AC beschrieb mit der Geschwindigkeit EC gleich $\frac{1}{2}BC$. Da aber der Körper in allen gleichen Zeiten gleiche Beschleunigungen erfährt, wird er vom Werthe CB an in dem folgenden Zeittheil CJ dieselben Geschwindigkeitszuwüchse erfahren entsprechend den Parallelen des Dreieckes BFG, gleich Dreieck ABC. Fügt man zum Werthe GJ die Hälfte von FG, dem in der beschleunigten Bewegung erreichten Maximum, so erhalten wir den Werth JN, mit welchem gleichförmig der Körper während der Zeit CJ sich bewegt hätte; dieser Werth JN ist das Dreifache von EC und entspricht der Strecke, die in dem zweiten Zeittheil CJ zurückgelegt wird, und ist zugleich dem Dreifachen der im ersten Zeittheil zurückgelegten Strecke gleich. Und lassen wir auf AJ einen neuen Zeittheil JO folgen, und das Dreieck bis APO anwachsen, so wird bei fortgesetzter Bewegung durch die Zeit JO mit einem Geschwindigkeitswerthe JF, der bei beschleunigter Bewegung in der Zeit AJ erlangt ist, da JF das Vierfache von EC, die in der Zeit JO zurückgelegte Strecke das Vierfache betragen von dem Wege in der ersten Zeit AC; bei fortgesetzter Vergrösserung des Dreieckes bis FPQ, welches ähnlich ABC sein wird, muss, auf gleichförmige Bewegung bezogen, ein Werth gleich EC hinzukommen, und wenn wir den Zuwachs QR gleich EC hinzufügen, so haben wir für die ganze gleichförmige Bewegung in der Zeit JO das Fünffache der gleichförmigen Bewegung im ersten Zeittheil AC, mithin wird der Weg das Fünffache des im ersten Zeittheil AC zurückgelegten sein. Man sieht also auch in dieser einfachen Ueberlegung, dass bei gleichförmiger Beschleunigung die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege sich wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 verhalten, und fasst man die Gesammtstrecken zusammen, so wird in doppelter Zeit der vierfache Weg, in dreifacher Zeit der neunfache Weg zurückgelegt, und allgemein werden die Wege wie die Quadrate der Zeiten sich verhalten.

Simpl. Ich habe wirklich mehr Geschmack gefunden an der einfachen und klaren Ueberlegung des Herrn *Sagredo* als an der mir etwas dunklen Beweisführung unseres Autors: so dass ich recht fest davon überzeugt bin, dass der Vorgang ein solcher sein müsse, vorausgesetzt nur, die Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung sei zugelassen. Ob aber die Beschleunigung, deren die Natur sich bedient, beim Fall der Körper

eine solche sei, das bezweifele ich noch, und deshalb würden ich und Andere, die mir ähnlich denken, es für sehr erwünscht halten, jetzt einen Versuch herbeizuziehen, deren es so viele geben soll, und die sich mit den Beweisen decken sollen.

Salv. Ihr stellt in der That, als Mann der Wissenschaft, eine berechtigte Forderung auf, und so muss es geschehen in den Wissensgebieten, in welchen auf natürliche Consequenzen mathematische Beweise angewandt werden; so sieht man es bei Allen, die Perspective, Astronomie, Mechanik, Musik und Anderes betreiben; diese alle erhärten ihre Principien durch Experimente, und diese bilden das Fundament des ganzen späteren Aufbaues: lasst uns es nicht für überflüssig halten, wenn wir mit grosser Ausführlichkeit diesen ersten und fundamentalen Gegenstand behandelt haben, auf welchem das immense Gebiet zahlloser Schlussfolgerungen ruht, von denen ein kleiner Theil von unserem Autor im vorliegenden Buche behandelt wird; genug, dass er den Eingang und die bisher den spekulativen Geistern verschlossene Pforte geöffnet hat. Der Autor hat es nicht unterlassen, Versuche anzustellen, und um mich davon zu überzeugen, dass die gleichförmig beschleunigte Bewegung in oben geschildertem Verhältniss vor sich gehe, bin ich wiederholt in Gemeinschaft mit unserem Autor in folgender Weise vorgegangen:

Auf einem Lineale, oder sagen wir auf einem Holzbrette von 12 Ellen Länge, bei einer halben Elle Breite und drei Zoll Dicke, war auf dieser letzten schmalen Seite eine Rinne von etwas mehr als einem Zoll Breite eingegraben. Dieselbe war sehr gerade gezogen, und um die Fläche recht glatt zu haben, war inwendig ein sehr glattes und reines Pergament aufgeklebt; in dieser Rinne liess man eine sehr harte, völlig runde und glattpolirte Messingkugel laufen. Nach Aufstellung des Brettes wurde dasselbe einerseits gehoben, bald eine, bald zwei Ellen hoch; dann liess man die Kugel durch den Kanal fallen und verzeichnete in sogleich zu beschreibender Weise die Fallzeit für die ganze Strecke: häufig wiederholten wir den einzelnen Versuch, zur genaueren Ermittelung der Zeit, und fanden gar keine Unterschiede, auch nicht einmal von einem Zehntheil eines Pulsschlages. Darauf liessen wir die Kugel nur durch ein Viertel der Strecke laufen, und fanden stets genau die halbe Fallzeit gegen früher. Dann wählten wir andere Strecken, und verglichen die gemessene Fallzeit mit der zuletzt erhaltenen und mit denen von $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ oder irgend anderen Bruchtheilen; bei

wohl hundertfacher Wiederholung fanden wir stets, dass die Strecken sich verhielten wie die Quadrate der Zeiten: und dieses zwar für jedwede Neigung der Ebene, d. h. des Kanales, in dem die Kugel lief. Hierbei fanden wir ausserdem, dass auch die bei verschiedenen Neignngen beobachteten Fallzeiten sich genau so zu einander verhielten, wie weiter unten unser Autor dasselbe andeutet und beweist. Zur Ausmessung der Zeit stellten wir einen Eimer voll Wasser auf, in dessen Boden ein enger Kanal angebracht war, durch den ein feiner Wasserstrahl sich ergoss, der mit einem kleinen Becher aufgefangen wurde, während einer jeden beobachteten Fallzeit: das dieser Art aufgesammelte Wasser wnrde auf einer sehr genauen Waage gewogen; aus den Differenzen der Wägungen erhielten wir die Verhältnisse der Gewichte und die Verhältnisse der Zeiten, und zwar mit solcher Genauigkeit, dass die zahlreichen Beobachtungen niemals merklich (di un notabile momento) von einander abwichen.

Simpl. Wie gern hätte ich diesen Versuchen beigewohnt: aber da ich von Eurer Sorgfalt und Eurer wahrheitsgetreuen Wiedergabe überzeugt bin, beruhige ich mich und nehme dieselben als völlig sicher und wahr an.

Salv. Nun, so können wir unsere Lektüre wieder aufnehmen und weiter gehen.

Zusatz II.

»Es folgt zweitens, dass, wenn vom Anfangspunkte der Bewegung an irgend zwei Strecken genommen werden, die in irgend zwei Zeiten zurückgelegt sind, diese Zeiten sich zu einander verhalten werden, wie die eine Strecke zur mittleren Proportionale aus beiden Strecken. Denn nimmt man vom Anfangspnnkt S (Fig. 49) zwei Strecken ST, SY; construire ferner deren mittlere Proportionale SX; alsdann wird die Fallzeit durch ST sich zur Fallzeit durch SY verhalten, wie ST zu SX; mit anderen Worten die Fallzeit durch SY zur Fallzeit durch ST, wie SY zu SX. Denn da bewiesen ist, dass die Strecken sich verhalten wie die Quadrate der Zeiten, das Verhältniss aber der Strecken YS und ST gleich dem Qnadrate des Verhältnisses YS zu SX, so ist es klar, dass die Fallzeiten durch SY, ST sich verhalten wie die Strecken YS, SX[6]).

S T X Y

Fig. 49.

Scholium.

Das was für senkrechten Fall bewiesen ist, gilt auch für den in beliebig geneigten Ebenen; in solchen wird die Geschwindigkeit nach demselben Gesetz vermehrt, nämlich dem Wachsthum der Zeit gemäss, d. h. wie die Reihe ganzer Zahlen [7].

Salv. Hier, Herr *Sagredo*, möchte ich, dass Sie mir, selbst auf die Gefahr hin, Herrn *Simplicio* zu langweilen, gestatten, die Lection ein wenig zu unterbrechen, um erklären zu können, wie viel auf Grund des bisher Bewiesenen, und auf Grund einiger Bemerkungen und Schlussfolgerungen unseres Akademikers, ich aus dem Gedächtniss hinzufügen kann zu weiterer Bekräftigung des oben durch Ueberlegung und Experimente dargestellten Verhaltens; denn es ist für die geometrische Beweisführung wichtig, einen elementaren Hülfssatz aus der Lehre von den Impulsen zu beweisen.

Sagr. Wenn die Errungenschaft eine solche ist, wie Sie es in Aussicht stellen, so ist mir keine Zeit zu lang, um sie nicht gern der Vertiefung unserer Erkenntniss zu widmen in der Bewegungslehre: und ich für mein Theil kann Euch nicht nur beipflichten, sondern bitte Euch dringend, meine erregte Wissbegierde baldmöglichst zu befriedigen; auch glaube ich, dass Herr *Simplicio* eben so denkt.

Simpl. Ich stimme dem völlig bei.

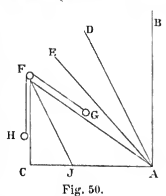


Fig. 50.

Salv. Mit Eurer Erlaubniss denn lasst uns die sehr bekannte Thatsache betrachten, dass die Momente oder Geschwindigkeiten ein und desselben Körpers bei verschiedenen Neigungen der Ebene verschieden sind, und dass sie den höchsten Werth hat bei senkrechter Richtung gegen den Horizont, dass aber bei geneigter Ebene die Geschwindigkeit um so geringer ist, je mehr die Ebene vom Loth abweicht, daher der Impuls (l'impeto), die Fähigkeit (il talento), die Energie (l'energia), oder sagen wir die Tendenz zum Fall (il momento del descendere) im Körper vermindert wird von der Ebene, auf welche er sich stützt, und hinabgleitet. Zu besserem Verständniss sei AB (Fig. 50) eine senkrecht zum Horizonte AC errichtete Linie, darauf bringe man dieselbe in verschiedene Neigungen gegen

den Horizont, wie in AD, AE, AF etc.; alsdann wird der Körper längs der Senkrechten BA den Maximalimpuls beim Fallen erhalten, einen geringeren längs DA, noch geringer längs EA, u. s. f. noch geringer längs FA, um schliesslich ganz zu verlöschen längs einer Horizontalen CA, in welcher der Körper sowohl bei Bewegung wie in der Ruhe sich indifferent verhält und von sich aus keine Tendenz zur Bewegung nach irgend einer Seite hat, wie er auch keinen Widerstand einer Bewegnng entgegensetzt; denn da es unmöglich ist, dass ein Körper sich von selbst nach oben bewegt und sich vom allgemeinen Schwerpunkt (centro commune) entfernt, nach welchem alle schweren Körper hinstreben, so ist es auch unmöglich, dass er von selbst sich bewege, wenn bei solcher Bewegung sein eigener Schwerpunkt sich nicht dem allgemeinen Schwerpunkt nähert: daher auf der Horizontalen, die hier eine Fläche bedeutet, die überall gleich weit vom allgemeinen Schwerpunkt absteht und deshalb thatsächlich frei von jeglicher Neigung ist, der Körper keinen Impuls erfährt.

In Hinsicht auf diese Aenderungen der Impulse will ich hier das anführen, was in einer alten Abhandlung über Mechanik, die unser Akademiker schon in Padua nur zum Gebrauch für seine Schüler abgefasst hat, ausführlich und gründlich bewiesen ist. Dort geschah es bei Erläuterung des Zusammenhanges und der Natur des wunderbaren Schraubeninstrumentes, nämlich, in welchem Verhältniss der Wechsel der Impulse zu Stande komme, bei verschiedenen Neigungen der Ebenen, wie z. B. von AF, wobei das eine Ende um FC erhoben worden. Längs der letzteren wäre die Tendenz zum Falle im Maximum, man sucht nun, in welchem Verhältniss diese Tendenz steht zu derjenigen längs der Ebene FA. Ich behaupte, diese Tendenzen ständen im umgekehrten Verhältniss zu den erwähnten Längen, und das ist der Satz, den ich dem später zu beweisenden Theorem voranstellen will. Es ist klar, dass die Tendenz eines Körpers zum Fall so gross ist, wie der Widerstand oder wie die geringste Kraft, die hinreicht, den Fall zu verhindern und den Körper in Ruhe zu erhalten. Diese Kraft, diesen Widerstand zu messen, bediene ich mich des Gewichtes eines anderen Körpers. Auf der Ebene FA ruht der Körper G mit einem Faden versehen, der über F geschlungen ein Gewicht H trage. Ueberlegen wir ferner, dass die senkrechte Fallstrecke des letzteren stets gleich sei der ganzen Fortbewegung des anderen Körpes G längs der Geneigten AF, nicht aber gleich der Senkung von G in senk-

rechter Richtung, in welcher der Körper G (wie jeder andere Körper) seinen Druck ausübt; denn betrachten wir im Dreieck AFC die Bewegung von G, in der Richtung von A nach F hinauf, so ist diese zusammengesetzt aus einer horizontalen AC und einer perpendiculären CF, und da der ersteren kein Widerstand entgegenwirkt, so ist der der Bewegung entgegenstehende Widerstand nur längs der Senkrechten CF zu überwinden; (denn bei der horizontalen Bewegung findet gar kein Verlust statt, auch ändert sich nicht die Entfernung vom gemeinsamen Schwerpunkt aller Körper, da diese im Horizonte unverändert bleibt). Wenn also der Körper G bei der Bewegung von A nach F nur den senkrechten Widerstand CF überwindet, und weil der andere Körper H durchaus senkrecht eine eben so lange Strecke wie auf FA fällt, und weil dieses Verhalten beim Auf- oder Absteigen immer dasselbe bleibt, ob die Körper viel oder wenig Bewegung ausführen (da sie mit einander verbunden sind), so können wir zuversichtlich behaupten, dass, wenn das Gleichgewicht bestehen und die Körper in Ruhe bleiben sollen, die Momente, die Geschwindigkeiten oder ihre Tendenzen (propensioni) zur Bewegung, d. h. die Strecken, die sie in gleicher Zeit zurücklegen würden, sich umgekehrt wie ihre Gewichte (le loro gravità) verhalten müssen, was für alle mechanische Bewegung bewiesen ist, so dass es den Fall von G zu hindern hinreicht, wenn H so viel mal weniger als G wiegt, wie das Verhältniss von CF zu FA beträgt. Macht man also G zu H, wie FA zu FC, so wird das Gleichgewicht eintreten, denn H, G werden gleiche Momente haben und in Ruhe verharren. Da wir nun einverstanden sind, dass eines Körpers Impuls, Energie, Moment, oder Bewegungstendenz eben so gross ist wie die Kraft oder wie der geringste Widerstand, der hinreicht zum Gleichgewicht, und wenn es ferner erwiesen ist, dass der Körper H die Bewegung von G zu hindern vermag, so wird das kleinere Gewicht H, welches in der senkrechten Richtung sein totales Moment wirken lässt, das genaue Maass sein desjenigen Partialmomentes, das das grössere Gewicht G längs der geneigten Ebene FA ausübt; aber das totale Moment desselben Körpers G ist G selbst (denn um den senkrechten Fall zu hindern, muss die Gegenkraft eben so gross sein, wie wenn der Körper völlig frei wäre); folglich wird der Impuls oder das Partialmoment von G längs FA sich zum Maximal- oder Totalimpuls von G längs FC sich verhalten, wie das Gewicht H zum Gewicht G, d. h. nach der Con-

struction wie die Erhebung der geneigten Ebene FC zur Ebene FA selbst, was unsere Behauptung war, und welcher Satz von unserem Akademiker, wie wir sehen werden, vorausgesetzt wird im zweiten Theile der sechsten Aufgabe in dieser Abhandlung[8]).

Sagr. Aus dem, was Sie bis jetzt gebracht haben, kann, wie mir scheint, leicht geschlossen werden, wenn man mehrere umgekehrte Proportionen betrachtet, dass die Momente ein und desselben Körpers längs Ebenen verschiedener Neigung wie FA, FJ bei gleicher Höhe, sich umgekehrt verhalten wie die Längen dieser Ebenen[9]).

Salv. Vollkommen richtig. Dieses festgestellt, will ich nun folgendes Theorem beweisen:

Die Geschwindigkeiten eines mit natürlicher Bewegung von gleichen Höhen über verschieden geneigte Ebenen herabfallenden Körpers sind bei der Ankunft am Horizonte stets gleich gross, wenn man die Widerstände entfernt hat.

Hier muss zunächst bemerkt werden, dass, wenn es feststeht, dass bei jedweder Neigung der Körper von der Ruhelage mit wachsender Geschwindigkeit sich bewegt oder dass die Impulse proportional der Zeit wachsen (der Definition gemäss, die der Autor von der natürlich beschleunigten Bewegung gegeben hat), dass dann auch, wie in dem vorigen Satze bewiesen ward, die Strecken sich wie die Quadrate der Zeiten, mithin auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, — dass ebenso wie die Impulse bei senkrechter Bewegung, so auch die im anderen Falle erlangten Geschwindigkeitswerthe sich gestalten werden, weil in jedem Falle die Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten in gleichen Verhältnissen anwachsen.

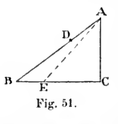


Fig. 51.

Sei nun AB (Fig. 51) eine geneigte Ebene, deren senkrechte Erhebung über den Horizont AC und CB der Horizont sei; und da wir kürzlich sahen, dass der Impuls eines Körpers in der Senkrechten AC sich zu dem längs AB verhält, wie AB zu AC, so nehme man in der geneigten Ebene AB die Strecke AD als dritte Proportionale zu AB, AC; der Impuls in der Richtung AC verhält sich zu dem längs AB oder längs AD wie AC zu AD, folglich wird der Körper in der Zeit, die er gebrauchen würde, die Senkrechte AC zu durchlaufen, längs der geneigten Ebene bis AD gelangen (da die Momente wie diese Strecken sich verhalten), und die Geschwindigkeiten in C und

D werden sich verhalten wie AC zu AD; aber die Geschwindigkeit in B verhält sich zu der in D, wie die Fallzeit durch AB zu der durch AD, der Definition der beschleunigten Bewegung gemäss, und die Fallzeit für AB verhält sich zu der für AD wie AC, die mittlere Proportionale zwischen BA, AD zu AD (dem letzten Corollar zum zweiten Lehrsatz gemäss), folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten in B und in C zu der in D, wie AC zu AD, und mithin sind sie einander gleich; und das war das zu beweisende Theorem.[10])

Jetzt können wir leichter das folgende dritte Theorem des Autors beweisen, in welchem er sich auf den Satz stützt, dass die Fallzeit längs der geneigten Ebene zu der in senkrechter Richtung sich wie die Länge derselben Ebene zur Höhe verhält. Denn wenn BA die Fallzeit für die Strecke AB ist, so wird die Fallzeit für AD das Mittel aus diesen beiden Grössen, mithin gleich AC sein, nach dem zweiten Corollar des zweiten Satzes; während aber AC die Fallzeit für AD ist, wird dasselbe auch die Fallzeit für AC selbst sein, sodass AD, AC in gleichen Zeiten durchlaufen werden, und wenn BA die Fallzeit für AB ist, wird AC die Fallzeit für AC sein; wie mithin AB zu AC, so verhält sich die Zeit längs AB zur Zeit längs AC.[11])

Ebenso wird bewiesen, dass die Zeit längs AC zur Fallzeit längs einer anders geneigten Strecke AE sich verhält, wie AC zu AE; folglich »ex aequali« die Fallzeit längs AB zu der längs AE, wie AB zu AE etc.

Man könnte durch ähnliche Schlussfolgerung, wie Herr *Sagredo* sogleich einsehen wird, unmittelbar den sechsten Satz des Autors beweisen; doch lassen wir jetzt die Abschweifung, die Ihnen vielleicht gar zu lang erschien, obwohl sie denn doch nützlich war in der vorliegenden Frage.

Sagr. Im Gegentheil, sie hat meinen vollen Beifall und dient durchaus zur vertieften Erkenntniss des Sachverhaltes.

Salv. So lasst uns denn die Lektüre unseres Textes wieder aufnehmen.

Theorem III. Propos. III.

»Wenn längs einer geneigten Ebene, sowie längs der Senkrechten gleicher Höhe ein und derselbe Körper aus der Ruhelage sich bewegt, so verhalten sich die beiden Fallzeiten zu einander wie die Länge der geneigten Ebene zur Länge der Senkrechten« (oder wie die Weglängen).

Es sei AC die geneigte Ebene, und AB (Fig. 52) die Senkrechte, beide in gleicher Höhe über dem Horizonte CB, nämlich AB: Ich behaupte, die Fallzeit längs AC verhalte sich zu der längs der Senkrechten AB, wie AC zu AB. Ziehen wir nämlich mehrere zum Horizont parallele Linien DG, EJ, FL, so ist schon bewiesen, dass die in den Punkten G, D erlangten Geschwindigkeiten einander gleich seien, da die Annäherung an den Horizont gleich gross ist; ebenso sind die Geschwindigkeiten in J, E einander gleich: sowie in L und in F. Erfasst man nicht blos diese Parallelen, sondern nur irgend denkbare zwischen AB und AC, so werden immer an Endpunkten irgend welcher Parallelen die Geschwindigkeiten dieselben sein. Es werden mithin zwei Strecken AC, AB mit denselben Geschwindigkeitswerthen durchlaufen. Allein es ist bewiesen, dass, wenn zwei Strecken mit denselben Geschwindigkeitswerthen durchmessen werden, diese Strecken sich wie die Zeiten verhalten, folglich verhält sich die Fallzeit längs AC zu der längs AB, wie die Länge AC zur Höhe AB, q. e. d.[12])

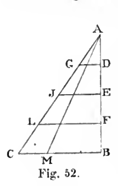


Fig. 52.

Sagr. Mir scheint, man hätte ebendasselbe klar und kurz erschliessen können auf Grund des Satzes, dass die bei beschleunigter Bewegung längs AC, AB zurückgelegten Strecken gleich den mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufenen Wegen seien, deren Betrag dem halben Maximalwerth CB gleichkommt; da nun AC, AB mit ein und derselben gleichförmigen Geschwindigkeit durchmessen werden, so folgt schon aus dem ersten Satze, dass die Fallzeiten sich wie die Fallstrecken verhalten werden.

Corollar.

Hieraus folgt, dass die Fallzeiten längs verschieden geneigten Ebenen bei gleichen Höhen sich wie die Längen dieser Ebenen verhalten. Denn wenn eine beliebige Ebene AM von demselben Anfangspunkte A anhebt und in demselben Horizonte CB endigt, so wird ähnlich bewiesen, dass die Fallzeiten längs AM und AB sich verhalten, wie die Strecken AM zu AB. Wie aber die Zeiten längs AB und AC, so verhalten sich die Linien

AB und AC; folglich »ex aequali« wie AM zu AC, so die Fallzeiten längs AM und AC.[13])

Theorem IV. Propos. IV.

»Die Fallzeiten längs gleich langen, ungleich geneigter Ebenen verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.«

Es seien von demselben Anfangspunkte B an (Fig. 53) zwei gleich lange, ungleich geneigte Ebenen BA, BC; deren Horizonte AE, CD (bis zur Senkrechten BD). Die Höhe von BA sei BE, die von BC sei BD, und die mittlere Proportionale beider sei BJ; alsdann ist bekanntlich das Verhältniss DB zu DJ gleich der Wurzel aus dem Verhältniss DB zu BE. Nun behaupte ich, dass die Fallzeiten längs BA und BC sich zu einander umgekehrt verhalten wie BE zu BJ: da nämlich zur Fallzeit BA die Höhe BD der anderen Ebene BC gehört, zur Fallzeit BC hingegen die Höhe BJ. Es muss also bewiesen werden, dass die Fallzeiten durch BA und BC sich verhalten wie DB zu BJ. Man ziehe JS parallel CD; alsdann ist bereits erwiesen, dass die Fallzeiten für BA und BE sich verhalten wie die Strecken BA, BE; allein die Zeiten für BE und BD verhalten sich wie BE zu BJ, und die Zeiten für BD und BC, wie BD zu BC oder wie BJ zu BS; folglich »ex aequali« die Zeiten längs BA und BC, wie BA zu BS oder wie CB zu BS, denn CB verhält sich zu BS, wie DB zu BJ; woraus der Lehrsatz erhellt.[14])

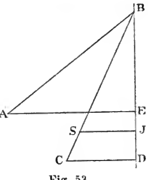


Fig. 53.

Theorem V. Propos. V.

Das Verhältniss der Fallzeiten längs Ebenen verschiedener Neigung, verschiedener Länge und verschiedener Höhe setzt sich zusammen aus dem Verhältniss der Längen und dem umgekehrten Verhältniss der Wurzeln aus den Höhen.

Es seien AB, AC (Fig. 54) verschieden geneigte Ebenen, deren Längen und Höhen ungleich. Ich behaupte, das Verhält-

niss der Fallzeiten für AC und AB sei zusammengesetzt aus dem Verhältniss der Strecken AC und AB, und der Wurzel aus dem umgekehrten Verhältniss ihrer Höhen. Man ziehe die Senkrechte AD, welche von den Horizontalen BG, CD getroffen wird, und es sei AL die mittlere Proportionale zu AG, AD; eine durch L gezogene Parallele treffe die Ebene AC in F, alsdann wird auch AF die mittlere Proportionale sein zwischen CA und EA. Und da die Fallzeiten für AC und AE sich verhalten wie die Strecken FA und AE, die Fallzeiten für AE und AB aber, wie eben diese Strecken AE, AB: so folgt, dass die Fallzeiten für AC, AB sich verhalten wie AF zu AB. Mithin erübrigt zu beweisen, dass das Verhältniss AF zu AB zusammengesetzt sei aus dem Verhältniss CA zu AB und aus GA zu AL, welches letztere gleich der Wurzel

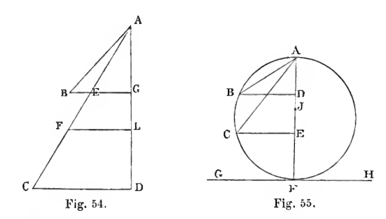


Fig. 54. Fig. 55.

aus dem umgekehrten Verhältniss der Höhen DA, AG. Dieses aber ist leicht einzusehen, denn nimmt man zur Betrachtung des Verhältnisses FA zu AB das Glied AC hinzu, so ist FA zu AC wie LA zu AD, oder wie GA zu AL, welches die Wurzel aus dem Verhältniss der Höhen GA, AD ist, und das Verhältniss von CA und AB ist eben dasjenige der Längen, woraus das Theorem folgt.[15])

Theorem VI. Propos. VI.

»Wenn von dem höchsten Punkte oder von dem Gipfel eines Kreises nach dem Horizonte hin geneigte Ebenen bis zur Kreis-

peripherie errichtet werden, so sind die Fallzeiten längs derselben einander gleich.«

Auf dem Horizonte GH (Fig. 55) erhebe sich ein Kreis, auf dessen Berührungspunkte F mit dem Horizonte der Durchmesser AF senkrecht errichtet sei; vom Gipfel seien nach irgend welchen Punkten der Peripherie geneigte Ebenen gezogen AB, AC. Ich behaupte, die entsprechenden Fallzeiten seien einander gleich. Man ziehe BD, CE senkrecht zum Durchmesser, und die mittlere Proportionale zu den Höhen EA, AD sei AJ. Da die Rechtecke FA, AE und FA, AD gleich sind den Quadraten von AC, AB und da mithin die Rechtecke FA, AE, FA, AD sich zu einander verhalten wie EA zu AD, so verhalten sich die Quadrate von CA und AB wie die Linien EA, AD. Wie aber EA zu DA, so verhält sich das Quadrat von JA zum Quadrat von AD; folglich verhalten sich die Quadrate von CA, AB wie die Quadrate der Linien JA, AD, und mithin die Linien CA, AB wie die Linien JA, AD. Aber vorhin ward bewiesen, dass die Fallzeiten durch AC, AB sich zusammensetzen aus den Verhältnissen CA zu AB und DA zu AJ, welch letzteres gleich BA zu AC ist; also wird das Verhältniss der Fallzeiten längs AB und AC zusammengesetzt aus CA zu AB und AB zu AC, folglich geht das Verhältniss jener Fallzeiten in Gleichheit über, woraus das Theorem folgt.[16])

Dasselbe findet man nach Grundsätzen der Mechanik, denen gemäss der Körper in gleichen Zeiten die Strecken CA, DA (Fig. 56) zurücklegt. Denn es sei $BA = DA$, und seien BE, DF Senkrechte, so ist aus den Elementen der Mechanik bekannt, dass das Moment des Gewichtes auf der Ebene ABC sich zu seinem totalen Momente verhält, wie BE zu BA, und das Moment desselben Gewichtes auf der Ebene AD zum totalen Momente, wie DF zu DA oder wie DF zu BA: folglich verhalten sich die Momente ein und desselben Körpers längs DA und längs CBA, wie die Linie DF zu BE. Daher werden die in gleichen Zeiten längs den Ebenen CA, DA zurückgelegten Strecken sich verhalten

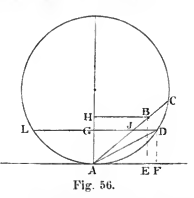


Fig. 56.

wie BE, DF, gemäss der II. Propos. des ersten Buches. Aber wie BE zu DF, so verhält sich, wie bewiesen werden wird, AC zu DA; folglich durchläuft der Körper die Strecken CA, DA in gleichen Zeiten.

Dass aber BE zu DF sich verhält, wie CA zu DA, folgt auf folgende Weise:

Man verbinde C mit D, und durch D und B ziehe man Parallelen zu AF, nämlich DGL, welche CA in J trifft und BH: alsdann wird der Winkel ADJ gleich sein dem Winkel DCA, da dieselben gleiche Bögen LA, AD umfassen, da ferner der Winkel DAC gemeinsam ist, so werden in den gleichwinkligen Dreiecken CAD, DAJ die Seiten, die gleichen Winkeln anliegen, einander proportional sein, wie mithin CA zu AD, so verhält sich AD zu AJ, oder auch BA zu AJ, also auch HA zu AG, d. h. wie BE zu DF, w. z. b. w.

Expediter ist folgender Beweis:

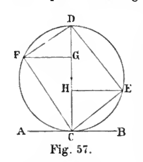


Fig. 57.

Ueber dem Horizonte AB (Fig. 57) sei ein Kreis errichtet, dessen Durchmesser CD senkrecht stehe. Vom Gipfel D werde irgend eine geneigte Ebene DF errichtet bis zur Peripherie. Ich behaupte, die Fallzeit längs DF sei gleich der Zeit des freien Falles längs DC. Man ziehe FG parallel zum Horizonte AB, mithin senkrecht zum Durchmesser DC, und ziehe FC; da die Fallzeiten für DC, DG sich verhalten wie die mittlere Proportionale von CD und DG zu DG selbst (denn die mittlere Proportionale von CD und DG ist DF, da der Winkel DFC im Kreise ein Rechter ist, und FG senkrecht steht auf DC): so werden sich die Fallzeiten längs DC und DG verhalten wie die Linien FD und DG; mithin werden die Fallzeiten für DF und DC zur Fallzeit für DG das gleiche Verhältniss haben, folglich sind sie einander gleich.[17]

Aehnlich lässt sich beweisen, dass, wenn vom untersten Punkte des Kreises eine Sehne CE und eine Parallele EH zum Horizonte gezogen und auch E mit D verbunden wird, die Fallzeit für EC gleich der für DC sei.

I. Corollar.

Hieraus folgt, dass die Fallzeiten längs allen durch C oder D gezogenen Sehnen einander gleich seien.

II. Corollar.

Auch folgt, dass, wenn von einem Punkte eine senkrechte und eine geneigte Ebene sich hinab erstrecken, längs welcher die Fallzeiten gleich gross seien, alle solche Strecken in einem Halbkreis liegen, dessen Durchmesser die lothrechte Fallstrecke selbst ist.

III. Corollar.

Ferner folgt, dass die Fallzeiten längs geneigten Ebenen dann einander gleich seien, wenn die Höhen gleicher Strecken auf diesen Ebenen sich verhalten, wie die Fallstrecken auf eben diesen Ebenen: denn es wurde gezeigt, dass in der vorletzten Figur 56 die Fallzeiten für CA, DA einander gleich seien, wenn die Höhe von AB, welches gleich AD war, nämlich die Linie BE, sich zur Höhe DF verhält, wie CA zu DA.

Sagr. Unterbrechet, bitte, ein wenig den Vortrag, bis ich einen Gedanken geklärt habe, der mir soeben beikam und der entweder einen Irrthum birgt oder ein anmuthiges Spiel (scherzo grazioso), wie wir solchem so oft in der Natur oder in dem Gebiete der Nothwendigkeit begegnen.

Es ist klar, dass, wenn man von einem Punkte einer Horizontalen unendlich viele gerade Linien nach allen Richtnngen hinzieht, auf denen allen ein Punkt mit gleicher Geschwindigkeit sich bewege, dass, im Falle alle in ein und demselben Angenblicke sich zu bewegen beginnen in dem genannten Punkte mit gleichen Geschwindigkeiten, alle diese Punkte stets immer wachsende Kreisperipherien bilden werden, die sämmtlich concentrisch um den Anfangspnnkt herumliegen, ganz so, wie man Wellen im stehenden Wasser von einem Punkte aus sich ansbreiten sieht, nachdem aus der Höhe ein Steinchen hineingefallen war, dessen Stoss den Antrieb zur Bewegung nach allen Richtungen abgiebt, und dieser Pnnkt bleibt der Mittelpunkt aller Kreise, welche die kleinen Wellen in immer wachsendem Umfange bilden. Wenn wir aber eine Ebene senkrecht zum Horizont errichten, und in dieser irgend einen Punkt als höchsten annehmen, von welchem aus nach allen möglichen Richtungen geneigte Linien ausgehen, längs welchen Körper mit natürlich beschleunigter Bewegnng mit dem einer jeden Neigung zukommenden Geschwindigkeitsbetrage fallen, in welcher Gestalt wären diese Körper geordnet, voransgesetzt, dass sie stets sichtbar blieben? Das erregt mein Erstaunen, dass, den vorigen

Erörterungen gemäss, alle Punkte auf immer wachsenden Kreisperipherien angeordnet bleiben werden, die sämmtlich immer mehr vom Anfangspunkte der Bewegung sich entfernen: zur deutlicheren Erklärung sei A (Fig. 58) der höchste Punkt, von welchem aus die Körper nach beliebigen Richtungen AF, AH sich bewegen, und auch längs der Vertikalen AB, in welcher die Mittelpunkte C, D der beiden durch A gezogenen Kreise beliebig angenommen wurden. Kreise, welche die geneigten Linien in FHB, EGJ schneiden. Es ist nach den vorigen Sätzen klar, dass, wenn gleichzeitig von A aus Körper in jenen Richtungen sich bewegen, sie auch gleichzeitig der eine in E, der zweite in G, der dritte in J sein werden, und weiter fallend werden sie gleichzeitig in F, H, B eintreffen u. s. f. würden unendlich viel Körper auf immer grösser werdenden Peripherien gleichzeitig ankommen bis in die Unendlichkeit. Die beiden Arten von Bewegung also, deren die Natur sich bedient, erzeugen mit einer wunderbar correspondirenden Verschiedenheit unendlich viel Kreise. Dort sehen wir den Sitz und Ursprung im Mittelpunkt unendlich vieler concentrischer Kreise, hier findet am höchsten Punkt ein Contakt unendlich vieler excentrischer Kreise statt. Jene entstehen aus gleichförmiger und gleicher Bewegung; diese aus lauter ungleichen Bewegungen, in jeder Richtung von der anderen verschieden. Ferner aber, wenn wir von den beiden genannten Punkten aus vier Linien ziehen, nicht blos in einer vertikalen und horizontalen Ebene, sondern nach allen Richtungen des Raumes hin, so werden wir gerade so, wie vorhin von einem Punkte aus Kreise erzeugt wurden, jetzt unendlich viele Kugeln entstehen sehen, oder besser eine Kugel, die bis ins Unendliche anwächst. Und das zwar auf zweierlei Art, nämlich mit dem Anfangspunkt der Bewegung im Centrum oder in der Peripherie aller Kugeln.

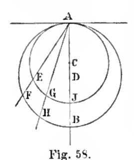


Fig. 58.

Salv. Das ist fürwahr ein sehr schöner Gedanke, der dem Scharfsinn des Herrn *Sagredo* entspricht.

Simpl. Ich habe völlig den Gedanken erfasst in Betreff der beiden Arten, wie die Kreise oder Kugeln erzeugt werden, entsprechend den beiden Arten natürlicher Bewegung, obwohl ich die Entstehung der Kreise bei der beschleunigten Bewegung nicht ganz verstanden habe: immerhin will mir der Umstand,

dass sowohl das Centrum wie der Gipfel Ausgangspunkt der Bewegung sein könne, die Vermuthung erwecken, dass ein grosses Mysterium in diesen wahren und wunderbaren Sätzen verborgen sei; ich meine ein Mysterium hinsichtlich der Erschaffung der Welt, — welch letztere man für eine Kugel hält, und hinsichtlich der ersten Ursache.

Salv. Ich stehe nicht an, ebendasselbe zu vermuthen, allein ähnliche tiefe Betrachtungen knüpfen sich an viele und an höhere Lehren an, als die unserigen es sind. Uns muss es genügen, dass wir jene weniger erhabenen Werkleute sind, die aus dem Schachte den Marmor hervorsuchen und herbeischaffen, aus welchem später die genialen Bildhauer Wunderwerke erzeugen, die unter rauher ungeformter Hülle verborgen lagen. Setzen wir nun, wenns beliebt, den Vortrag fort.

Theorem VII. Propos. VII.

»Wenn die Höhen zweier geneigten Ebenen sich verhalten wie die Quadrate der Längen, so werden letztere in gleichen Zeiten zurückgelegt.«

Es seien AE, AB (Fig. 59) zwei ungleich lange, ungleich geneigte Ebenen, deren Höhen FA, DA sich verhalten wie die Quadrate von AE zu AB. Ich behaupte, die Fallzeiten längs AE, AB von der Ruhe aus seien einander gleich. Man ziehe die Parallelen EF, BD horizontal, wobei AE in G geschnitten wird. Da FA zu AD gleich dem Quadrate von EA zu AB, und da FA zu AD, wie EA zu AG, so verhält sich EA zu AG wie das Quadrat von EA zu AB; folglich ist AB die mittlere Proportionale zu EA, AG, und da die Fallzeiten längs AB, AG sich verhalten, wie AB zu AG, die Fallzeit längs AG aber zu der längs AE sich verhält, wie AG zur mittleren Proportionale aus AG, AE, nämlich zu AB, so wird die Fallzeit längs AB zu der längs AE sich verhalten, wie AB zu AB; folglich sind die Zeiten einander gleich; q. e. d.[18])

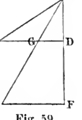


Fig. 59.

Theorem VIII. Propos. VIII.

»Auf Ebenen, die von Peripheriepunkten eines und desselben Kreises nach dem Horizonte hin sich neigen, sind die

Fallzeiten in denjenigen Ebenen, die nach dem untersten oder obersten Punkte des Kreises gerichtet sind, einander gleich und gleich der Fallzeit längs des senkrechten Durchmessers: auf Ebenen dagegen, welche den Durchmesser nicht schneiden, sind die Fallzeiten kürzer, dagegen länger auf solchen, die den Durchmesser schneiden.«

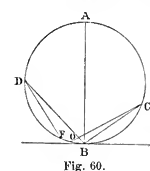


Fig. 60.

Der senkrechte Durchmesser des auf dem Horizonte errichteten Kreises sei AB (Fig. 60). Es ward schon bewiesen, dass die Fallzeiten längs Ebenen, die in A oder B endigen, einander gleich seien. Längs DF, welches den Durchmesser nicht erreicht, soll die Fallzeit kürzer sein. Dass die Fallzeit längs DF kürzer sei, als längs DB, wird leicht erkannt, da letzteres länger und dabei weniger geneigt ist, mithin ist auch die Fallzeit kürzer als längs AB. Längs CO dagegen, welches den Durchmesser schneidet, muss die Fallzeit aus demselben Grunde länger sein, da es länger und stärker geneigt ist, als CB; woraus das Theorem folgt.

Theorem IX. Propos. IX.

»Wenn aus einem Punkte einer horizontalen Linie zwei Ebenen beliebig geneigt angenommen werden, und diese Ebenen von einer Linie geschnitten werden, welche mit den Ebenen Winkel bildet, die wechselweise den Neigungen der Ebenen gegen den Horizont gleich sind, so werden die Fallzeiten vom Anfangspunkte bis zu den Schnittpunkten mit der schneidenden Linie einander gleich sein.«

Aus dem Punkte C (Fig. 61) der horizontalen Linie X werden zwei beliebig geneigte Ebenen CD, CE construirt, und von einem beliebigen Punkte der Linie CD ein Winkel CDF, gleich XCE, angetragen: DF schneidet die Ebene CE in F, so dass die Winkel CDF, CFD den Winkeln XCE, LCD wechselweise gleich sind. Ich behaupte, die Fallzeiten für CD, CF seien einander gleich. Da nämlich CDF gleich XCE gemacht ist, so muss auch der Winkel CFD gleich dem Winkel DCL sein. Denn nach Fortnahme des gemeinsamen Winkels DCF, einmal aus den drei Winkeln des Dreieckes CDF, die

gleich zwei Rechten sind, dann von der Summe der Winkel, die bei C unterhalb X zusammenliegen, bleiben vom Dreiecke die Winkel CDF, CFD nach, die mithin gleich sind den beiden XCE, LCD: da nun CDF gleich XCE gemacht ist, so muss der Rest CFD gleich dem Reste DCL sein. Man mache nun CE gleich CD und errichte in den Punkten D, E Senkrechte DA, EB zum Horizonte XL, aus C aber ziehe man CG senkrecht zu DF. Da nun der Winkel CDG gleich dem

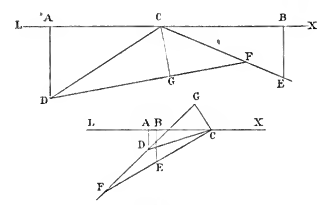


Fig. 61.

Winkel ECB, und DGC, CBE rechte Winkel sind, so sind die Dreiecke CDG, CBE gleichwinklig, mithin DC zu CG, wie CE zu EB, DC aber ist gleich CE, folglich muss auch CG gleich BE sein. Da ferner in den Dreiecken DAC, CGF die Winkel DCA, CAD den Winkeln GFC, CGF gleich sind, so verhält sich FC zu CG wie CD zu DA und umgekehrt auch wie DC zu CF so DA zu CG, welch letztes gleich BE. Die Höhen der Ebenen DC, CE verhalten sich also wie die Längen DC, CE: folglich sind, dem ersten Corollar der sechsten Proposition gemäss, die Fallzeiten einander gleich, q. e. d.[19])

Auf anderem Wege: man ziehe FS (Fig. 62) senkrecht zum Horizonte AS. Da das Dreieck CSF ähnlich dem DGC, so verhält sich SF zu FC, wie GC zu CD. Da ferner das Dreieck CFG ähnlich dem DCA, so verhält sich FC zu CG, wie CD zu DA: folglich auch SF zu CG, wie CG zu DA. Daher ist CG die mittlere Proportionale zu SF, DA, und wie DA zu SF, so verhält sich das Quadrat von DA zum Quadrat

von CG. Da andererseits das Dreieck ACD dem CGF ähnlich ist, so verhält sich DA zu DC, wie GC zu CF, also auch durch Tausch der Glieder DA zu CG, wie DC zu CF. und wie das Quadrat von DA zum Quadrat von CG, so verhalten sich die Quadrate von DC, CF. Aber es ist bewiesen, dass die Quadrate von DA, CG sich verhalten, wie die Linien DA, FS; folglich wie die Quadrate von DC, CF, so verhalten sich die Linien DA, FS; mithin folgt gemäss der siebenten Proposition, dass, weil die Höhen der Ebenen CD, CF, nämlich DA, FS sich verhalten, wie die Quadrate der Längen, die Fallzeiten längs den letzteren einander gleich seien.

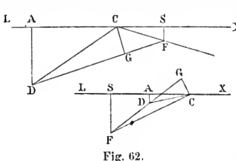


Fig. 62.

Theorem X. Propos. X.

»Die Fallzeiten längs Ebenen verschiedener Neigung, aber gleicher Höhe, verhalten sich wie die Längen dieser Ebenen, einerlei ob die Bewegung von der Ruhelage an beginnt, oder ob eine Bewegung aus gleichen Höhen voraufging.«

Es mögen die Bewegungen längs ABC (Fig. 63) und längs ABD bis an den Horizont DC vor sich gehen, so dass die Bewegung durch AB den weiteren BD, BC voraufgeht. Ich behaupte, die Fallzeiten längs BD und BC verhalten sich wie die Strecken DB und BC. Man ziehe AF dem Horizonte parallel, verlängere DB bis zum Schnittpunkte F, ferner sei die mittlere Proportionale zu DF, FB gleich FE; zieht man EO parallel DC, so wird AO die mittlere Proportionale zu CA, AB sein. Sei nun die Fallzeit durch AB gleich AB, so ist die Fallzeit durch FB gleich FB. Die Fallzeit längs AC wird alsdann durch AO, diejenige längs FD durch FE ge-

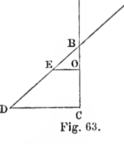


Fig. 63.

messen. Daher ist die Fallzeit für den Rest BC gleich BO, und für den Rest BD gleich BE. Wie aber BE zu BO, so verhält sich BD zu BC; folglich verhalten sich die Fallzeiten für BD, BC nach dem Falle durch AB, FB, oder, was dasselbe ist, durch die gemeinsame Strecke AB, wie die Längen BD, BC. Aber das Verhältniss der Fallzeiten durch BD und BC, von der Ruhe aus, ist gleich dem der Längen BD, BC, wie oben bewiesen ward. Mithin verhalten sich die Fallzeiten längs geneigten Ebenen gleicher Höhe, wie die Längen der Ebenen, einerlei ob die Bewegung mit der Ruhe anhebt, oder ob eine andere Bewegung aus gleicher Höhe voraufgeht, q. e. d. [20])

Theorem XI. Propos. XI.

»Wenn eine Ebene, in welcher von der Ruhelage an eine Bewegung geschieht, irgend wie getheilt wird, so verhält sich die Fallzeit in den beiden getrennten Strecken, wie die erste Strecke zum Ueberschuss des geometrischen Mittels aus der ersten und ganzen Strecke über der ersten.« [21])

Es geschehe die Bewegung längs AB (Fig. 64) von A aus, und sie werde irgendwo in C getheilt; das geometrische Mittel aus BA und dem ersten Theile sei AF: alsdann ist CF der Ueberschuss des Mittels FA über den Theil AC: Ich behaupte, die Fallzeiten durch AC und CB verhalten sich wie AC zu CF. Es verhalten sich nämlich die Fallzeiten durch AC und AB, wie AC zu AF; folglich durch Vertheilung die Fallzeit durch AC zu der durch den Rest CB, wie AC zu CF. Wenn nun AC die Fallzeit für AC ist, so wird die Fallzeit für CB gleich CF sein, w. z. b. w.

Fig. 64.

Fig. 65.

Wenn aber die Bewegung nicht in einer geraden Linie ACB (Fig. 65), sondern längs einer gebrochenen ACD vor sich geht bis an den Horizont BD, welch letzterem parallel FE gezogen sei vom Punkte F aus, so lässt sich ebenso zeigen, dass die Fallzeit längs AC zu der längs CD sich verhält, wie AC zu CE.

Denn die Fallzeiten für AC, CB verhalten sich wie AC zu CF, die Fallzeiten für CB, nach Zurücklegung von AC, zu der für CD, gleichfalls nach zurückgelegten AC, wie CB zu CD oder wie CF zu CE; folglich die Fallzeiten für AC und CD, wie die Linien AC, CE.

Theorem XII. Propos. XII.

»Wenn eine senkrechte und eine beliebig geneigte Ebene von zwei Horizontalen geschnitten werden, und wenn man die mittleren Proportionalen bildet zwischen ihnen und ihren Stücken von ihrem Durchschnittspunkte an bis zu den Schnittpunkten mit der oberen Horizontalen, so verhält sich die Fallzeit längs der Senkrechten zu der längs einer Linie, die aus dem oberen Theile der Senkrechten und dem unteren Theile der geneigten Ebene zusammengesetzt ist, wie die gesammte Länge der Senkrechten zu der Summe zweier Strecken, deren eine die mittlere Proportionale in der Senkrechten, deren andere gleich dem Ueberschuss der ganzen geneigten Ebene über der mittleren Proportionale in derselben.«

Die obere Horizontale sei AF (Fig. 66), die untere CD, zwischen welchen die Senkrechte AC und die Geneigte DF sich in B schneiden; die mittlere Proportionale zwischen CA und AB sei AR, dagegen zwischen DF und BF sei sie FS. Ich behaupte, die Fallzeit für AC verhalte sich zu der für AB sammt BD, wie AC zur mittleren Proportionale im Lothe, nämlich AR sammt SD, welches der Ueberschuss der Geneigten DF über der Mittleren SF ist.

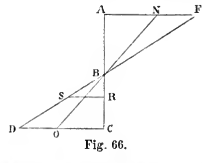


Fig. 66.

Man verbinde R mit S, dem Horizonte parallel. Da die Fallzeiten durch AC, AB sich verhalten wie die Linien AC, AR, so wird, wenn AC als Maass der Fallzeit für AC genommen wird, AR die Fallzeit AB sein, also RC diejenige für den Rest BC. Wenn aber AC die Fallzeit für AC ist, so wird auch FD die Fallzeit für FD und mithin DS die Fallzeit für BD, nach Zurücklegung von FB oder AB, sein. Folglich ist die Fallzeit für AC gleich

AR sammt RC; längs der Gebrochenen ABD dagegen gleich AR sammt SD; q. e. d.[22])

Aehnliches Verhalten findet man, wenn statt der Senkrechten irgend eine andere Ebene, wie NO, angenommen wird; der Beweis bleibt derselbe.

Probl. I. Propos. XIII.

»Wenn eine Senkrechte gegeben ist, so soll eine Ebene in solcher Neigung construirt werden, dass bei gleicher Höhe nach dem Fall in der Senkrechten, die Bewegung in derselben Zeit geschehe, wie in der Senkrechten vom Ruhezustande an.«

Die Senkrechte AB (Fig. 67) sei gegeben, und es werde derselben ein gleich grosses Stück BC hinzugefügt, dann ziehe

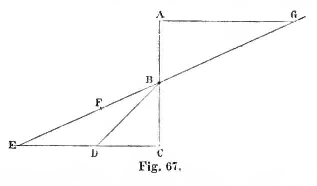


Fig. 67.

man die Horizontalen CE, AG. Es soll von B aus eine geneigte Ebene so gelegt werden, dass in derselben nach dem Fall durch AB die Bewegung längs der Ebene, deren Höhe auch gleich AB ist, in derselben Zeit geschehe, wie in der Strecke AB von der Ruhe in A an. Man mache CD gleich CB, verbinde B mit D nnd bringe BE an gleich der Summe von BD nnd DC. Ich behanpte, BE sei die geforderte Ebene. Man verlängere BE bis zur oberen Horizontalen AG in G; die Mittlere zu EG, GB sei GF. Es wird sich EF zu FB verhalten, wie EG zu GF, und die Quadrate von EF nnd FB, wie die Quadrate von EG, GF, mithin wie die Linien EG, GB; aber EG ist das Doppelte von GB; folglich ist das Quadrat von EF das Doppelte vom Quadrate von FB: aber auch das Quadrat von DB ist das Doppelte des Quadrates von BC; folglich verhält sich die Linie EF zu FB, wie DB

zu BC und wenn man verbindet und verwechselt, so verhält sich EB zur Summe der Beiden DB und BC, wie BF zu BC; aber BE ist gleich der Summe von DB und BC; folglich ist BF gleich BC, gleich BA. Wenn also AB als Maass der Fallzeit für AB angenommen wird, so ist GB die Fallzeit für GB, und GF die für die ganze Strecke GE; folglich ist BF die Fallzeit für den Rest BE, nach dem Fall von G oder A aus;[23]) q. e. d.

Probl. II. Propos. XIV.

»Eine Senkrechte und eine geneigte Ebene seien gegeben, es soll im oberen Theile der Senkrechten das Stück bestimmt werden, welches vom Ruhezustand aus in derselben Zeit zurückgelegt wird, wie dasjenige längs der geneigten Ebene nach einer Bewegung längs der gesuchten Strecke.«

Die Senkrechte DB (Fig. 68) sei gegeben, sowie die geneigte Ebene AC. Man soll in dem Lothe AD ein Stück bestimmen, welches von der Ruhe aus in derselben Zeit zurückgelegt wird, wie das Stück AC längs der Geneigten, nach dem Falle in der gesuchten senkrechten Strecke. Man ziehe die Horizontale CB, und wie BA sammt $2AC$ sich zu AC verhält, so sei AC zu AE und wie BA zu AC, so verhalte sich EA zu AR. Von R aus ziehe man die Horizontale RX gegen DB hin; so wird X der gesuchte Punkt sein. Denn wie BA sammt $2AC$ zu AC, so verhält sich CA zu AE; mithin wie BA sammt AC zu AC, so CE zu EA, und weil BA zu AC sich verhält, wie EA zu AR, so wird BA sammt AC zu AC sich verhalten, wie ER zu RA. Aber wie BA sammt AC zu AC, so verhält sich CE zu EA; folglich wie CE zu EA, so ER zu RA, also auch wie die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, d. h. wie CR zu RE. Folglich ist ER die mittlere Proportionale zu CR und AR. Weil ferner BA zu AC, wie EA zu AR, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke BA zu AC, wie XA zu AR, so ist EA zu AR wie XA zu AR: folglich sind EA, XA einander gleich. Wenn nun die Fallzeit für RA mit RA bemessen wird, so ist

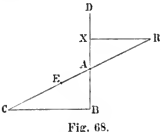


Fig. 68.

die Fallzeit für RC gleich RE, der Mittleren zu CR, RA: folglich ist AE die Fallzeit für AC nach RA oder nach XA; aber die Fallzeit für XA ist XA, weil RA die Fallzeit für RA ist. Folglich sind, da XA gleich AE ist, die Fallzeiten einander gleich, q. e. d.[24])

Probl. III. Propos. XV.

»Eine Senkrechte und eine geneigte Ebene seien gegeben: es soll in der unteren Strecke der Senkrechten [vom Schnittpunkte mit der geneigten Ebene an] ein Stück bestimmt werden, welches in derselben Zeit durchlaufen wird, wie das gegebene Stück längs der Geneigten nach dem Fall durch die gegebene Senkrechte.«

Die Senkrechte AB (Fig. 69) sei gegeben und die geneigte Ebene BC. Im unteren Theile des Lothes AB soll ein Stück gefunden werden, welches beim Falle von A aus in derselben Zeit durchlaufen wird, wie BC, gleichfalls von A aus. Man ziehe die Horizontale AD, der die verlängerte geneigte Ebene CB in D begegne. Die mittlere Proportionale zu CD, DB sei DE, alsdann mache man BF gleich BE, endlich construire man AG als dritte Proportionale zu BA, AF,

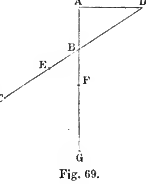


Fig. 69.

$$(BA : AF = AF : AG).$$

Ich behaupte, BG sei die Strecke, die nach dem Fall durch AB in derselben Zeit durchlaufen wird, wie die Strecke BC unter derselben Bedingung. Denn sei die Fallzeit durch AB durch AB bemessen, so ist die Fallzeit durch DB gleich DB, und da DE die mittlere Proportionale ist zu BD, DC, so ist DE die Fallzeit für die ganze Strecke DC, und BE diejenige für den Rest BC, wenn der Fall in D beginnt oder durch AB erfolgt war; ähnlich findet man BF als Fallzeit durch BG, unter denselben Vorbedingungen; aber BF ist gleich BE, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Theorem XIII. Propos. XVI.

»Wenn Stücke einer geneigten Ebene und der Senkrechten, deren Fallzeiten von der Ruhelage an gleich sind, von einem Punkte ausgehen, so wird ein aus irgend welcher Höhe fallender Körper das Stück längs der geneigten Ebene schneller durcheilen, als das Stück längs der Senkrechten.«

Es sei EB (Fig. 70) die Senkrechte, und am Punkte E schliesse sich die geneigte Ebene CE an, zugleich seien die Fallzeiten von der Ruhe in E einander gleich. In der Senkrechten werde ein beliebiger höher gelegener Punkt A angenommen, von welchem aus die Körper fallen mögen. Ich behaupte, die Strecke EC werde in kürzerer Zeit durchlaufen, als die Senkrechte EB, nach dem Fall durch AE. Man verbinde C mit B, construire eine Horizontale AD, verlängere CE bis zum Schnittpunkte D; die mittlere Proportionale zu CD, DE sei DF und die zu BA, AE sei AG; man verbinde F und D mit G. Da die Fallzeiten durch EC, EB, von E aus, einander gleich sind, so ist der Winkel bei C ein Rechter, gemäss dem zweiten Corollar der sechsten Proposition; auch A ist ein rechter Winkel und die Scheitelwinkel bei E sind einander gleich:

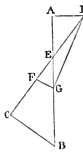


Fig. 70.

folglich sind die Dreiecke AED, CEB gleichwinkelig, und die gleiche Winkel umschliessenden Seiten einander proportional: folglich verhält sich DE zu EA, wie BE zu EC. Das Rechteck BE, EA ist mithin gleich dem Rechteck CE, ED: ($BE \times EA = CE \times ED$). Da das Rechteck CD, DE grösser ist als das Rechteck CE, ED um das Quadrat von DE, dagegen das Rechteck BA, AE das Rechteck BE, EA um das Quadrat von EA übertrifft, so ist der Ueberschuss des Rechteckes CD, DE über dem Rechtecke BA, AE, oder was dasselbe ist, der Ueberschuss des Quadrates von FD über das Quadrat von AG gleich dem Ueberschuss des Quadrates von DE über dem Quadrat von AE, welcher Ueberschuss gleich ist dem Quadrat von AD; folglich ist das Quadrat von FD gleich der Summe der beiden Quadrate über GA, AD, und auch gleich dem Quadrat von GD: mithin sind die Linien DF, DG einander gleich und der Winkel DGF ist gleich dem Winkel DFG, und Winkel EGF kleiner als

EFG, und die gegenüberliegende Seite EF kleiner als EG. Wenn nun die Fallzeit durch AE mit AE bemessen wird, so ist die für DE gleich DE, und da AG die mittlere Proportionale zu BA, AE ist, wird AG die Fallzeit für die ganze Strecke AB sein, und der Rest EG wird die Fallzeit sein für den Rest EB, wenn der Körper von A aus fällt; ähnlich findet man EF als Fallzeit für EC nach einem Fall durch DE oder AE: da aber gezeigt ist, dass EF kleiner als EG ist, so ist das Theorem bewiesen.« [25])

Corollar.

Aus vorigem und früheren Sätzen ist bekannt, dass diejenige Strecke, welche nach dem Fall aus dem höchsten Punkte in derselben Zeit durchlaufen wird, wie diejenige längs der geneigten Ebene, kleiner sei als der in gleicher Zeit wie auf der Geneigten, ohne vorhergehenden Fall, durchlaufene Weg, grösser dagegen als die geneigte Strecke selbst: denn da soeben bewiesen ist, dass, nach dem Fall aus dem höchsten Punkte A, die Fallzeit für EC kürzer sei als die für EB, so ist die Strecke, die in der Fallzeit längs EB (gleich der Fallzeit für EC) durchlaufen wird, kleiner als die ganze Strecke EB. Dass aber diese senkrechte Strecke grösser sei, als EC, wird klar, wenn man die Figur der vorhergehenden Proposition nimmt, für welche bewiesen ward, dass die senkrechte Strecke BG (Fig. 71) in derselben Zeit durchlaufen wird, wie BC nach dem Fall durch AB: dass aber BG grösser als BC sei, wird folgendermaassen gezeigt. Da BE und FB einander gleich sind, BA aber kleiner als BD ist, so ist FB zu BA grösser als EB zu BD, mithin auch FA zu AB grösser als ED zu DB; aber es ist FA zu AB, wie GF zu FB (denn AF war die mittlere Proportionale zu BA, AG); und ähnlich wie ED zu BD, so verhält sich CE zu EB; mithin auch GB zu BF oder zu BE grösser als CB zu BE; folglich ist GB grösser als BC.

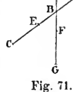


Fig. 71.

Probl. IV. Propos. XVII.

»Eine Senkrechte und eine sich anschliessende geneigte Ebene seien gegeben. In letzterer soll der Weg bestimmt werden,

der nach dem Fall durch das senkrechte Stück, in derselben Zeit durchlaufen wird, wie in der Senkrechten.«

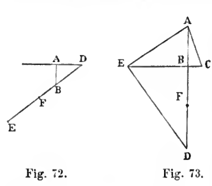


Fig. 72. Fig. 73.

Es sei AB (Fig. 72) die Senkrechte, und BE die geneigte Ebene: es soll BE so lang gemacht werden, dass nach dem Fall durch AB die Fallzeit gleich der für AB, von der Ruhelage an, sei.

Es sei AD die Horizontale, der in D die geneigte Ebene begegnet; man mache FB gleich BA und mache DE zu FD wie FD zu BD. Ich behaupte, die Fallzeit für BE, nach dem Fall durch AB sei gleich der Fallzeit durch AB von A aus. Wenn AB die Fallzeit für AB ist, so ist DB diejenige für DB. Da ferner BD zu DF wie FD zu DE, so ist DF die Fallzeit für die ganze Strecke DE, und BF diejenige für den Theil BE, von D aus; aber die Fallzeit für BE nach DB ist dieselbe wie die für BE nach AB; folglich ist die Zeit für BE, nach AB, gleich BF, mithin gleich der Zeit AB, von A aus; q. e. d.[26]

Probl. V. Propos. XVIII.

»Wenn in einer Senkrechten von der Ruhelage aus eine Fallstrecke bezeichnet ist, die in gegebener Zeit durchlaufen wird, so soll derjenige Weg bestimmt werden, der [an Länge jener Strecke gleich] in einer gegebenen kürzeren Zeit zurückgelegt wird.«

Es sei AD (Fig. 73) die Senkrechte und AB die Strecke, deren entsprechende Fallzeit, von A aus, gleich AB sei, CBE sei horizontal, und die gegebene kürzere Zeit, gleich BC, sei im Horizonte aufgetragen: es soll in der Senkrechten eine Strecke gleich AB gefunden werden, die in der Zeit BC durchlaufen wird. Man ziehe AC. Da BC kleiner als BA, so ist der Winkel BAC kleiner als der Winkel BCA. Man trage CAE gleich ECA an, die Linie AE trifft den Horizont in E. In E erreicht man senkrecht ED, so dass das Loth in D

getroffen wird und trage DF gleich BA ab. Ich behaupte, FD sei diejenige Strecke der Senkrechten, in welcher die Bewegung in der gegebenen Zeit BC geschieht, vorausgesetzt die Bewegung beginne in A. Da nämlich im rechtwinkligen Dreiecke AED vom rechten Winkel E aus eine zur gegenüberliegenden Seite AD gehende Gerade EB senkrecht steht, so wird AE die mittlere Proportionale sein zu DA, AB; nun ist BE die mittlere Proportionale zu DB, BA oder zu FA, AB (denn FA ist gleich DB). Wenn nun AB die Fallzeit durch AB bemisst, so ist AE oder EC die Zeit für AD, und EB die Zeit für AF; folglich ist der Rest BC die Fallzeit für den Rest FD, was behauptet wurde.[27])

Probl. VI. Propos. XIX.

»In einer Senkrechten sei vom Anfangspunkte der Bewegung eine Fallstrecke mit der entsprechenden Fallzeit gegeben: es soll die Zeit gefunden werden, in welcher eine ebenso grosse beliebig in der Senkrechten liegende Strecke gleicher Grösse durchlaufen wird.«

In der Senkrechten AB (Fig. 74) sei eine beliebige Strecke AC gegeben, der Anfangspunkt der Bewegung in A; es sei AC gleich in irgend einer Stelle DB angenommen, die Fallzeit für AC sei AC. Es soll die Fallzeit für DB bestimmt werden nach dem Falle von A aus. Ueber AB als Durchmesser beschreibe man den Kreis AEB, und errichte von C aus die Gerade CE senkrecht zu AB, ziehe AE, welches grösser als EC sein wird. Man schneide EF gleich EC ab; ich behaupte, der Rest FA sei die Fallzeit für DB. Es ist nämlich AE die mittlere Proportionale zu BA, AC; und da AC die Fallzeit für AC ist, so wird AE die Fallzeit für AB sein. Da ferner CE die mittlere Proportionale zu DA, AC (denn DA ist gleich BC), so wird CE oder EF die Fallzeit für AD sein; folglich ist der Rest AF die Fallzeit für DB; q. e. p.

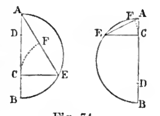


Fig. 74.

Corollar.

Daraus folgt, dass, wenn die Fallzeit einer Strecke von der Ruhe aus gleich dieser Strecke gesetzt wird; die Fallzeit längs

derselben Strecken nach Zurücklegung eines darüber angefügten Stückes gleich sein wird dem Ueberschnss der mittleren Proportionale zur Summe beider und der nrsprünglichen Strecke über der mittleren Proportionale zu beiden einzelnen Stücken.

Denn, es sei die Fallzeit für AB (Fig. 75), von der Ruhe A an, gleich AB; man füge AS hinzn, so wird die Fallzeit für AB, nach Durchlaufung von SA, gleich sein dem Ueberschuss der mittleren Proportionalen zu SB, BA über der zu BA, AS.

Probl. VII. Propos. XX.

»Eine beliebige Strecke sei gegeben, und in derselben ein Theil, nach dem Ruhepunkte hin gelegen; ein anderer Theil gegen das Ende hin soll bestimmt werden, der in derselben Zeit znrückgelegt wird, wie die erste Theilstrecke.«

Es sei CB (Fig. 76) die Senkrechte, und CD der gegebene Theil, nach der Ruhelage hin. Ein anderes Stück, das bis B reicht, zu finden, mit derselben Fallzeit wie die für CD. Man bilde die mittlere Proportionale zu BC, CD und trage, derselben gleich, BA ab; zu BC, CA sei die dritte Proportionale gleich CE ($BC : CA = CA : CE$). Ich behaupte, EB sei diejenige Strecke, welche, von C aus, in derselben Zeit durchlaufen wird, wie CD selbst. Wenn nämlich die Fallzeit für CB gleich CB, so wird BA (die mittlere Proportionale zu BC, CD) die Fallzeit für CD sein. Und da CA die mittlere Proportionale zu BC, CE, so wird CA die Fallzeit für CE sein. Aber BC ist die Zeit für CB; folglich ist der Rest BA die Fallzeit für den Rest EB nach dem Fall von C aus; allein dasselbe BA war die Fallzeit für CD; folglich werden CD und EB in gleichen Zeiten dnrchlaufen, von der Ruhe in C aus, was verlangt war.

Fig. 75. Fig. 76.

Theorem XIV. Propos. XXI.

»Wenn in der Senkrechten der Fall von der Ruhelage aus geschieht, nnd es wird ein von Anfang an bezeichnetes Stück in gewisser Zeit durchlaufen, währcnd nach demselben eine

Bewegung in einer beliebig geneigten Ebene erfolgt: so ist die Strecke, die in solch geneigter Ebene in derselben Zeit znrückgelegt wird, wie das Stück in der Senkrechten, mehr als das Doppelte und weniger als das Dreifache der. senkrechten Strecke.« —

Unterhalb des Horizontes AE (Fig. 77) sei die Senkrechte AB gegeben; der Fall beginne in A und man wähle ein Stück AC; alsdann folge beliebig geneigt CG, längs welches der Fall bei C fortgesetzt werde. Ich behanpte, die bei solcher Bewegung in gleicher Zeit wie durch AC znrückgelegte Strecke CG sei mehr als das Doppelte und weniger als das Dreifache der Strecke AC. Man trage CF gleich AC ab, verlängere die Ebene GC bis znm Horizonte in E, so verhalte sich CE zu EF, wie FE zu EG. Wenn nnn die Fallzeit für AC gleich AC gesetzt wird, so ist EC die Fallzeit für EC und CF oder CA die Fallzeit für CG. Es muss daher nachgewiesen werden, dass die Strecke CG mehr als das Doppelte und weniger als das Dreifache von CA sei. Es ist nämlich CE zu EF, wie FE zu EG, folglich auch wie CF zu FG. Aber EC ist kleiner als EF, daher ist auch CF kleiner als FG und GC grösser als das Doppelte von FC oder AC. Da andererseits FE kleiner als das Doppelte von EC (denn EC ist grösser als CA oder CF), so ist auch GF kleiner als das Doppelte von FC, und GC kleiner als das Dreifache von CF oder CA. q. e. d.

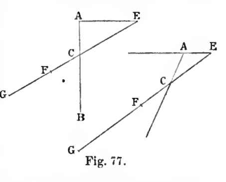


Fig. 77.

Man konnte auch allgemeiner den Satz aufstellen: denn was für die Senkrechte gilt und für eine geneigte Ebene, gilt ebenso, wenn nach der Bewegnng in einer irgendwie geneigten Ebene eine stärker geneigte durchlanfen wird; wie solches in der anderen Figur ersichtlich ist; der Beweis bleibt derselbe.

Probl. VIII. Propos. XXII.

»Zwei ungleiche Zeitgrössen seien gegeben und der Weg, der in der kürzeren von beiden von der Rnhe aus durchlaufen

wird: es soll durch den obersten Punkt eine geneigte Ebene so gelegt werden, dass sie bis zum Horizonte reicht, und ihre Länge in dem längeren Zeitbetrage zurückgelegt wird.«

Die gegebenen Zeitgrössen seien die grössere A, die kleinere B (Fig. 78); die senkrecht von der Ruhe aus durchlaufene Strecke sei CD. Man soll von C aus bis zum Horizonte eine geneigte Ebene so bestimmen, dass ihre Länge in der Zeit A durchmessen wird. Wie B zu A, so verhalte sich CD zu einer Linie, der CX gleich gemacht ist, welch letztere vom Punkte C

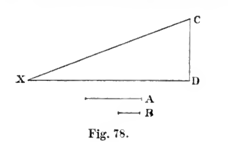


Fig. 78.

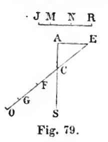


Fig. 79.

nach dem Horizonte geneigt angebracht sei: offenbar wird CX die verlangte Ebene sein. Denn es ist bewiesen, dass die Fallzeiten längs der geneigten Ebene und längs ihrer Höhe sich verhalten wie die Länge zur Höhe. Die Fallzeiten für CX und für CD verhalten sich somit wie CX zu CD, also wie die Zeiten A zu B; aber B ist die Fallzeit für CD; folglich A jene, in welcher die Länge der Ebene durchmessen wird.

Probl. IX. Propos. XXIII.

»Die senkrechte, von der Ruhelage aus in gegebener Zeit durchlaufene Strecke sei gegeben: durch den untersten Punkt der letzteren soll eine geneigte Ebene so gelegt werden, dass nach dem Fall durch die senkrechte Strecke in derselben Zeit eine gegebene Strecke längs der geneigten durchmessen werde: doch muss letztere Strecke mehr als das Doppelte und weniger als das Dreifache der senkrechten Fallstrecke betragen.«

In der Senkrechten AS (Fig. 79) werde in der Zeit AC die Strecke AC durchlaufen, von A aus: es sei ferner JR grösser als $2 \times AC$ und kleiner als $3 \times AC$. Man soll von C aus eine geneigte Ebene so legen, dass ein Körper, nach dem Falle durch AC, in derselben Zeit AC einen Weg gleich JR durchmisst.

Es seien RN, NM gleich AC; und wie der Rest JM zu MN so verhalte sich AC zu einer anderen Strecke CE, die von C aus bis zum Horizonte in E reiche. Man verlängere dieselbe gegen O hin und trage CF, FG, GO an, gleich RN, NM, MJ. Ich behaupte, die Fallzeit für CO, nach dem Falle durch AC, sei gleich der Fallzeit für AC, von A aus. Da nämlich OG zu GF, wie FC zu CE, so ist durch Zusammensetzung OF zu FG oder FC, wie FE zu EC, nnd wie eines der Vorderglieder zu einem der entsprechenden Hinterglieder, so verhalten sich die Summen zu den Summen, also OE zu EF wie FE zu EC. Folglich ist EF die mittlere Proportionale zu OE und EC. Wenn nun AC die Fallzeit für AC ist, so ist CE diejenige für EC; EF aber ist die Fallzeit für die ganze Strecke EO, und der Rest CF für den Rest CO; aber CF ist gleich CA; folglich ist das Verlangte ausgeführt; denn CA ist die Fallzeit für AC von A aus, CF dagegen (welches gleich CA ist) ist die Fallzeit für CO, nach dem Falle durch EC oder durch AC: q. e. p. Es muss indess bemerkt werden, dass dasselbe statthat, wenn die vorangehende Bewegung nicht in der Senkrechten, sondern in einer geneigten Ebene vor sich geht, wie in der Fig. 80, wo die erste Bewegung längs AS unterhalb des Horizontes AE geschieht; im Uebrigen ist der Beweis derselbe.

Scholium.

Bei aufmerksamer Betrachtung erkennt man, dass, je weniger die gegebene Linie JR abweicht von $3AC$, um so näher die geneigte Ebene CO in die Richtung des Lothes fällt, in welchem in der Zeit AC schliesslich der volle Weg $3AC$ dnrchlaufen wird. Denn je mehr JR dem dreifachen Betrage von AC sich nähert, um so näher wird JM gleich MN. Und da JM zu MN sich verhält, wie AC zu CE (nach der Construction), so wird CE etwas grösser als CA werden, und mithin wird der Punkt E ganz nahe bei A liegen und CO mit CS einen sehr spitzen Winkel einschliessen, sodass sie beinahe sich decken. Wenn aber andererseits JR nur wenig grösser als $2AC$, so wird JM sehr klein sein: daher auch AC klein gegen CE ausfällt, welch letzteres sehr lang wird, und fast mit einer durch C gehenden Horizontalen sich deckt. Hieraus erkennen wir, dass, wenn in Fig. 80 nach dem Fall durch die geneigte Strecke AC ein Bruch in C längs CT statthat, in der Fallzeit gleich AC eine Strecke gleich $2AC$ durchlaufen wird. Die Schlussfolgerung ist ähnlich

der obigen: denn da OE zu EF sich verhält, wie FE zu EC, so bemisst FC die Fallzeit für CO. Ist aber eine horizontale Strecke TC gleich $2\,CA$, so halbire man sie in V; ihre Verlängerung nach X hin wird unendlich sein, denn der Schnittpunkt auf AE verlangt, dass die Unendliche TX zur Unendlichen VX sich ebenso verhalte, wie die Unendliche VX zur Unendlichen XC.

Ebendasselbe hätten wir in anderer Weise erschliessen können, indem wir dem in der ersten Proposition vorliegenden Ge-

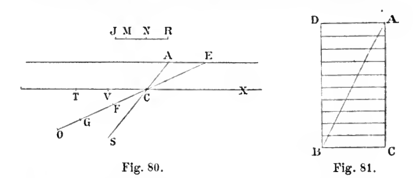


Fig. 80. Fig. 81.

dankengange folgen. Denn nehmen wir ein Dreieck ABC, in welchem die der Basis BC parallelen Linien (Fig. 81) uns die den wachsenden Zeiten entsprechenden Geschwindigkeitsgrade darstellen, so sind dieselben unendlich ihrer Zahl nach, wie die Punkte der Geraden AC, entsprechend den Momenten zu irgend welchen Zeiten, und füllen das Dreieck aus, wenn wir annehmen, dass die Bewegung um eine ebenso lange Zeit fortgesetzt werde wie zuvor, aber nicht mehr beschleunigt, sondern gleichförmig, mit einem Werthe, entsprechend dem durch BC dargestellten Maximum. Aus diesen letzten Geschwindigkeiten würde ein Parallelogramm $ADBC$ gebildet werden; dieses aber ist das Doppelte vom Dreieck ABC. Daher ist die mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegte Strecke gleich dem Doppelten der bei beschleunigter Bewegung durch das Dreieck ABC dargestellten. Aber in einer Horizontalebene ist die Bewegung eine gleichförmige, da weder eine Beschleunigung noch eine Verzögerung verursacht wird, mithin wird eine Strecke CD, die in einer Zeit AC zurückgelegt wird, das Doppelte der Strecke AC betragen, denn bei beschleunigter Bewegung wird die Bewegung den Parallelen des Dreiecks entsprechen, bei jener gleichförmigen

dagegen den Parallelen des Parallelogramms, welche, unendlich an Zahl, das Doppelte betragen jener Parallelen des Dreiecks.

Indess ist zu beachten, dass der Geschwindigkeitswerth, den der Körper aufweist, in ihm selbst unzerstörbar enthalten ist (impresso), während äussere Ursachen der Beschleunigung oder Verzögerung hinzukommen, was man nur auf horizontalen Ebenen bemerkt, denn bei absteigenden nimmt man Beschleunigung wahr, bei aufsteigenden Verzögerung. Hieraus folgt, dass die Bewegung in der Horizontalen eine unaufhörliche sei: denn wenn sie sich stets gleich bleibt, wird sie nicht geschwächt oder aufgehoben, geschweige denn vermehrt. Und ferner, da die beim freien Fall erlangte Geschwindigkeit unzerstörbar und unaufhörlich ihm eigen ist, so erhellt, dass, wenn nach dem Fall längs einer geneigten Ebene eine Ablenkung nach einer ansteigenden Ebene statthat, in dieser letzteren die Ursache einer Verzögerung auftritt, denn in eben solch einer Ebene findet auch natürliche Beschleunigung statt; deshalb tritt eine Vereinigung entgegengesetzter Impulse ein, indem der beim Fallen erlangte Geschwindigkeitswerth, der den Körper unaufhörlich fortbewegen würde, sich zu dem durch den Fall erzeugten hinzugesellt. Es scheint daher verständlich, wenn wir die neuauftretenden Ursachen untersuchen, und nachdem der Körper längs der geneigten Ebene gefallen ist, gezwungen wird, anzusteigen, annehmen, dass er die beim Fall erlangte Maximalgeschwindigkeit auch beim Anstieg behalte, dass er aber hierbei der natürlichen Verzögerung unterliege in dem Betrage, wie er bei natürlicher Beschleunigung von der Ruhelage aus ihm ertheilt würde. Um dieses leichter einzusehen, diene nebenstehende Zeichnung. Es sei der Fall längs der geneigten Ebene AB (Fig. 82) geschehen, und die Fortsetzung gehe in der ansteigenden BC vor sich; zunächst seien die Ebenen

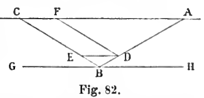


Fig. 82.

einander gleich, unter gleichen Winkeln zum Horizonte GH geneigt. Nun ist es bekannt, dass der Körper von der Ruhe in A aus längs AB Geschwindigkeiten erlangt, proportional der Zeit, der Werth in B wird der grösste sein, und würde unabänderlich dem Körper innewohnen, wenn neue Ursachen der Beschleunigung oder Verzögerung fehlten; der Beschleunigung, wenn der Körper noch weiter fiele, der Verzögerung, wenn

er längs BC anstiege; längs der Horizontalen GH würde also die in B erlangte Geschwindigkeit ohne Ende beharren. Der Betrag derselben ist ein solcher, dass in einer Zeit, die gleich ist der Fallzeit längs AB, längs der Horizontalen eine Strecke gleich $2AB$ zurückgelegt würde. Nun aber nehmen wir an, dass der Körper mit ebendieser Geschwindigkeit längs BC sich bewegte, sodass in derselben soeben genannten Zeit eine Strecke gleich $2BC$ zurückgelegt würde. In Wirklichkeit aber sehen wir ihn dabei sofort ansteigen, er unterliegt ähnlichen Einflüssen, wie beim Falle längs AB, denn beim Falle längs CB würde er dieselben Geschwindigkeiten erlangen und in denselben Zeiten dieselben Wege zurücklegen, wie längs AB: woraus erhellt, dass durch Summation (mixtio) der gleichförmigen aufsteigenden und der beschleunigt absteigenden Bewegung der Körper längs BC den Punkt C erreichen wird in Folge zweier Geschwindigkeitswerthe, die einander gleich sind. Nimmt man beiderseits Punkte DE gleichweit von B, so ist die Fallzeit längs DB gleich der Anstiegzeit längs BE. Denn, wenn DF parallel BC gezogen wird, so wissen wir, dass nach dem Fall längs AD der Anstieg längs DF geschieht. Wenn aber in D der Körper sich horizontal längs DE fortbewegt, so ist die Geschwindigkeit in E dieselbe wie in D, folglich steigt der Körper von E bis C. Hieraus erkennen wir zuversichtlich, dass, wenn der Fall längs irgend einer geneigten Ebene statthat und alsdann ein Anstieg eintritt, der Körper stets in Folge der erlangten Geschwindigkeit bis zu derselben Höhe oder Erhebung über den Horizont sich bewegen wird. Fällt er längs AB (Fig. 83), so steigt er längs BC bis C, d. h. bis zur Horizontalen ACB; nicht nur, wenn beide Ebenen gleich geneigt sind, sondern auch, wenn sie ungleiche Winkel bilden, wie BD. Denn die Geschwindigkeitsgrade sind dieselben bei jedweder Neigung bei gleicher Höhe. Wenn EB, BD gleich geneigt sind, so vermag der Fall längs EB den Körper bis D zu bewegen. Ob nun der Körper längs AB oder EB fällt, die Geschwindigkeit in B ist ein und dieselbe, mithin steigt der Kö[illegible] bis D, sowohl nach dem Fall längs AB, wie längs BE. [illegible] Anstieges längs BD ist grösser, als die längs BC, [illegible] Fallzeit für EB grösser ist, als die für AB: denn

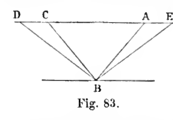


Fig. 83.

es war schon bewiesen, dass diese Fallzeiten sich wie die Längen der entsprechenden Ebenen verhalten. Wir müssen noch untersuchen das Verhältniss der in gleichen Zeiten längs Ebenen verschiedener Neigung und gleicher Höhe zurückgelegten Strecken, also den Fall zwischen einander parallelen Horizontalen, worauf sich das Folgende bezieht.

Theorem XV. Propos. XXIV.

»Zwischen zwei einander parallelen Horizontalen sei eine Senkrechte gegeben, von deren unterstem Punkte eine Ebene errichtet sei. Nach dem Fall längs der Senkrechten ist die in derselben Fallzeit beim Anstieg zurückgelegte Strecke grösser als die Senkrechte und kleiner als das Doppelte derselben.«

Zwischen den Horizontalen BC, HG (Fig. 84) sei die Senkrechte AE und die Geneigte EB gezogen. Nach dem Fall durch AE geschehe ein Reflex in E nach B hin. Ich behaupte, die in der Fallzeit für AE längs EB zurückgelegte Strecke sei grösser, als AE und kleiner als $2AE$.

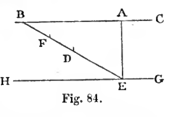


Fig. 84.

Es sei ED gleich AE, und wie EB zu BD, so verhalte sich DB zu BF. Es werde zuerst bewiesen, dass der Punkt F in der Fallzeit längs AE erreicht werde, dann, dass EF grösser sei als EA, und kleiner als $2EA$. Es sei die Fallzeit längs AE gleich AE, alsdann ist die Fallzeit längs BE oder die Anstiegzeit längs EB gleich der Linie BE: und da DB die mittlere Proportionale zwischen EB, BF, und da BE die Fallzeit längs BE ist, so ist BD die Fallzeit längs BF, und der Rest DE die Fallzeit längs des Restes FE. Aber ebenso gross ist die Fallzeit längs FE von der Ruhelage in B aus, und auch die Anstiegzeit längs EF, wenn der Körper in E mit der längs BE oder AE erlangten Geschwindigkeit ansteigt: mithin ist DE die Zeit, in welcher der Körper nach dem Fall von A längs AE, nach dem Reflex in B den Punkt F erreicht. Aber ED ist gleich AE. Und da EB zu BD, wie DB zu BF, so verhält sich auch EB zu BD, wie ED zu DF. Aber EB ist grösser als BD, folglich ist auch ED grösser als DF und EF kleiner als $2DE$ oder als $2AE$; w. z. b. w. Ganz dasselbe gilt, wenn der anfängliche Fall nicht in der Senkrechten, sondern

in einer Geneigten vor sich geht; der Beweis ist derselbe, solange nur die Reflexebene weniger geneigt und mithin länger ist als die Fallebene.

Theorem XVI. Propos. XXV.

»Wenn nach dem Fall längs einer geneigten Ebene die Bewegung in der Horizontalen fortgesetzt wird, so verhält sich die Fallzeit längs der Geneigten, zur Zeit der Bewegung längs irgend einer Strecke in der Horizontalen, wie die doppelte Länge der geneigten zur horizontalen Strecke.« —

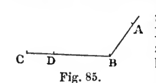


Fig. 85.

Es sei CB (Fig. 85) die Horizontale, AB die Geneigte, und nach der Bewegung längs AB folge die im Horizont, in welchem die Strecke BD beliebig angenommen sei. Ich behaupte, die Fallzeit für AB verhalte sich zu der für BD, wie $2AB$ zu BD. Man nehme BC gleich $2AB$, so ist bewiesen, dass die Fallzeit längs AB gleich BC sei: aber die Fallzeiten für BC und DB verhalten sich wie die Linien CB und BD; folglich verhält sich die Fallzeit für AB zur Zeit der Bewegung längs BD, wie $2AB$ zu BD, w. z. b. w.

Probl. X. Propos. XXVI.

»Eine Senkrechte zwischen zwei Horizontalen sei gegeben, desgleichen eine Strecke, grösser als die Länge der Senkrechten, aber kleiner als das Doppelte derselben; es soll vom untersten Punkte der Senkrechten eine Ebene so geneigt werden, dass beim Aufstieg, nach dem Falle durch die Senkrechte der Körper eine der gegebenen gleiche Strecke zurücklege in derselben Zeit, in welcher er gefallen war.«

Zwischen den Parallelen AO, BC (Fig. 86) sei die Senkrechte AB; FE sei ferner grösser als BA und kleiner als $2BA$. Es soll von B aus eine Ebene so geneigt werden, dass der Körper nach dem Falle längs AB in derselben Fallzeit beim Ansteigen eine Strecke EF zurücklegt. Man mache ED gleich AB, alsdann wird der Rest DF kleiner als AB sein, da die ganze Strecke EF kleiner als $2AB$ war. Es sei ferner DJ gleich DF und wie EJ zu JD, so mache man DF zu FX. Von B ziehe man BO gleich EX. Ich behaupte, BO sei jene

Ebene, auf welcher nach dem Falle längs AB der Körper in derselben Zeit ansteigt um eine Strecke gleich EF. Man mache den Strecken ED, DF gleich BR, RS. Da nun EJ zu JD, wie DF zu FX, so ist auch ED zu DJ wie DX zu XF; also wie ED zu DF, so auch DX zu XF und EX zu XD, folglich wie BO zu OR, so RO zu OS. Wenn nun die Fallzeit für AB gleich AB, so ist die für OB gleich OB und RO

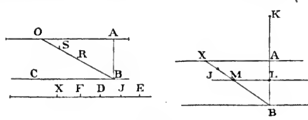


Fig. 86.

die für OS; mithin der Rest BR gleich der Fallzeit für den Rest SB beim Fallen von O bis B. Aber die Fallzeit für SB, von der Ruhelage in O aus, ist gleich der Anstiegzeit von B bis S nach dem Fall durch AB; folglich ist BO die bei B anhebende Ebene, auf welcher nach dem Fall durch AB in der Zeit BR oder BA eine Strecke BS gleich der gegebenen EF zurückgelegt wird.[28])

Theorem XVII. Propos. XXVII.

»Wenn ein Körper längs zwei Ebenen verschiedener Neigung, aber gleicher Höhe herabfällt, so ist die Strecke, die im unteren Theile der längeren Ebene in derselben Zeit durchlaufen wird, wie die ganze kürzere Ebene, gleich der Summe zweier Strecken, deren eine die kürzere Ebene selbst, die andere ein Betrag, der sich zur kürzeren Ebene verhält, wie die längere zum Ueberschuss der längeren über die kürzere Ebene.«

Fig. 87.

Es sei AC (Fig. 87) die längere, und AB die kürzere Ebene, deren beider Höhe gleich AD; es werde von C aus ein Stück CE gleich AB abgetragen; und wie CA zu AE (d. h. zum Ueberschuss der

längeren Ebene über der kürzeren), so verhalte sich CE zu EF. Ich behaupte, die Strecke FC werde nach einem Fall von A aus in derselben Zeit durchlaufen wie AB. Weil nämlich CA zu AE, wie das Stück CE zu EF, so ist der Rest EA zum Rest AF, wie das Ganze CA zum Ganzen AE. Folglich sind die drei Strecken CA, AE, AF einander folgweise proportional. [continue proportionales, d. h. CA zu AE wie AE zu AF.] Wenn nun die Fallzeit für AB gleich AB ist, so ist diejenige für AC gleich AC, die für AF aber ist gleich AE und die Fallzeit für den Rest FC ist gleich EC; aber EC ist gleich AB; w. z. b. w. —

Theorem XVIII. Propos. XXVIII.

»Die Horizontale AG (Fig. 88) berühre einen Kreis; vom Berührungspunkte aus ziehe man den senkrechten Durchmesser AB und zwei Sehnen wie AE, EB. Es soll das Verhältniss der Fallzeit durch AB zu der durch AE und EB bestimmt werden.« Man verlängere BE bis zur Tangente in G, und halbire den Winkel BAE, indem man AF zieht. Ich behaupte, die Fallzeit längs AB verhalte sich zu der längs AEB, wie AE zu AEF. Da nämlich der Winkel FAB gleich ist dem Winkel FAE, der Winkel EAG aber gleich dem Winkel ABF, so wird der gesammte Winkel GAF gleich FAB sammt ABF, mithin auch gleich GFA sein; folglich ist die Linie GF gleich der Linie GA.

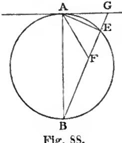


Fig. 88.

Und weil das Rechteck BG, EG gleich dem Quadrate von GA, so ist es auch gleich dem Quadrate von GF, und die drei Linien BG, GF, GE bilden eine Proportion (BG zu GF wie GF zu GE). Wenn nun die Fallzeit längs AE gleich AE ist, so ist diejenige für GE gleich GE; GF ist die Fallzeit für die ganze Strecke GB, und EF diejenige für EB nach dem Falle von G, oder von A aus längs AE. Mithin verhält sich die Fallzeit längs AE oder längs AB zu der längs AEB, wie AE zu AEF, was zu bestimmen war.

Kürzer folgendermaassen: Man schneide GF gleich GA ab; GF ist die mittlere Proportionale zwischen BG, GE. Das Uebrige wie vorhin.

Probl. XI. Propos. XXIX.

»Es sei eine horizontale Strecke gegeben, von deren einem Ende aus eine Senkrechte errichtet sei, von welcher ein Stück gleich der halben horizontalen Strecke aufgetragen sei. Ein aus solcher Höhe fallender und alsdann in die Horizontale abgelenkter Körper wird diese beiden Strecken in kürzerer Zeit durchlaufen, als irgend eine andere senkrechte, mitsammt derselben sich gleichbleibenden horizontalen Strecke.«

In einer Horizontalen sei eine Strecke BC (Fig. 89) gegeben. In der Senkrechten, im Punkte B errichtet, sei BA gleich $\frac{1}{2}BC$ abgetragen. Ich behaupte, die Fallzeit längs beiden Strecken AB. BC sei die kürzeste unter allen, die möglich sind bei derselben horizontalen Strecke BC und irgend welchen grösseren oder kleineren senkrechten Strecken, als AB. Es sei diese Strecke grösser, wie in der ersten Figur, oder kleiner, wie in der zweiten, gleich EB. Es soll gezeigt werden, dass die Fallzeit für EB, BC stets grösser sei als diejenige für AB, BC. Es sei die Fallzeit längs AB gleich AB; so ist dieses zugleich die Zeit der Bewegung in der Horizontalen BC, da BC gleich $2AB$, und die Zeit längs beiden Strecken ABC wird gleich $2BA$ sein. Es sei ferner BO die mittlere Proportionale zu EB, BA; alsdann ist BO die Fallzeit für EB. Es sei ferner die horizontale Strecke BD gleich $2BE$; so ist die Bewegungszeit für diese Strecke nach dem Falle längs EB auch gleich BO. Wie nun DB zu BC, oder wie EB zu BA, so mache man OB zu BN. Da nun in der Horizontalen die Bewegung eine gleichförmige ist, und da OB die Fallzeit längs BD ist nach dem Falle von E aus, so wird NB die Fallzeit für BC sein nach einem Falle aus derselben Höhe BE. Hieraus folgt, dass OB sammt BN die Fallzeit durch EBC darstelle, und da $2AB$ die Fallzeit durch ABC ist, so erübrigt zu beweisen, dass OB sammt BN grösser sei als $2AB$. Da aber OB die mittlere Proportionale zu EB, BA ist, so verhält

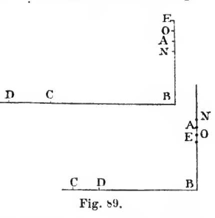


Fig. 89.

sich EB zu BA, wie das Quadrat von OB zu BA; nnd da EB zn BA, wie OB zu BN, so wird auch OB zu BN gleich dem Quadrate des Verhältnisses OB zu BA sein; aber das Verhältniss OB zn BN kann zusammengesetzt werden aus den Verhältnissen OB zu BA und AB zu BN; folglich ist AB zu BN gleich dem Verhältniss OB zu BA. Mithin sind BO, BA, BN drei folgweise Proportionale (BO zu BA wie BA zu BN). Folglich sind OB und BN zusammen grösser als $2\,BA$, woraus das Theorem folgt.[29])

Theorem XIX. Propos. XXX.

»Fällt man eine Senkrechte aus irgend einem Punkte einer Horizontalen, und soll durch einen beliebigen anderen Punkt derselben Horizontalen eine geneigte Ebene bis zur Senkrechten so gelegt werden, dass ein Körper in kürzester Zeit von der Horizontalen bis zur Senkrechten hinabfällt, so ist solch eine Ebene der Art geneigt, dass der von der Senkrechten abgeschnittene Theil ebenso gross ist, wie die Distanz der beiden willkürlich angenommenen Punkte in der Horizontalen.«

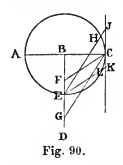


Fig. 90.

Es sei BD (Fig. 90) das aus B gefällte Loth, die Horizontale sei AC. Man nehme C beliebig an, und nehme BE gleich BC, verbinde C mit E. Ich behaupte, dass unter allen dnrch C gehenden Ebenen CE diejenige sei, längs welcher die Fallzeit bis zur Senkrechten die kürzeste sei. Man nehme CF, CG unter geringerer und stärkerer Neigung an, ziehe mit dem Radins BC einen Kreis und errichte bei C die Tangente JK senkrecht zum Horizonte. Ferner ziehe man EK parallel FC, bis zum Schnitt mit der Tangente in K, wobei der Kreis in L getroffen werde. Es ist bekannt, dass die Fallzeit für LE gleich der für CE sei, aber diejenige für KE ist grösser als die für LE; mithin ist auch die Fallzeit für KE grösser als die für CE; nun ist die Fallzeit für KE gleich der für CF, da diese Strecken ganz gleich lang und gleich geneigt sind; ähnlich sind auch CG und JE einander gleich und gleich geneigt, sodass deren Fallzeiten dieselben sind, während diejenige für HE geringer ist als die für JE, da die Strecke kürzer ist; mithin ist auch die Fallzeit für CE (welche gleich der für HE ist) kürzer als die für JE, woraus das Theorem folgt.

Theorem XX. Propos. XXXI.

»Wenn über einer Horizontalen eine gerade Linie irgendwie geneigt liegt, so ist eine durch einen beliebigen Punkt der Horizontalen gelegte Ebene, längs welcher ein Körper in kürzester Zeit von einem Punkte jener Linie den Horizont erreicht, diejenige, welche den Winkel zwischen denjenigen beiden Senkrechten halbirt, die durch den genannten Pnnkt gezogen werden können, von welchen eine senkrecht zum Horizont, die andere senkrecht zur gegebenen Linie errichtet ist.«

Es sei AB (Fig. 91) die Horizontale, CD die beliebig geneigte Linie. Im Horizonte sei der Punkt A beliebig angenommen, von welchem aus AC senkrecht zu AB und AE senkrecht zn CD gezogen werde. Den Winkel CAE halbire die Linie AF. Ich behaupte, dass von allen Ebenen, die durch irgend welche Punkte von CD nach dem Punkte A hin gelegt werden können, FA diejenige sei, längs welcher der Fall bis A die kürzeste Zeit in Anspruch nimmt. Man ziehe FG parallel AE, alsdann sind GFA, FAE als Wechselwinkel einander gleich; aber EAF ist gleich FAG, mithin sind die Dreiecksseiten FG, GA einander gleich. Wenn man also von G aus mit dem Radius GA einen Kreis beschreibt, so wird dieser durch F hindurchgehen nnd die Horizontale und die Gerade in A und F berühren; denn GFC ist ein Rechter, da GF parallel AE gezogen wurde. Hierans folgt, dass alle anderen nach der Geraden von A aus gezogenen Linien über die Peripherie des Kreises hinans sich erstrecken, woraus dann weiter folgt, dass die entsprechenden Fallzeiten länger seien, als für FA, w. z. b. w.

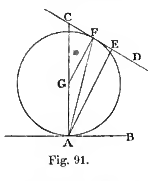


Fig. 91.

Hülfssatz.

»Wenn zwei Kreise sich von innen berühren, während der innere Kreis von einer beliebigen Geraden berührt wird, welche den äusseren Kreis schneidet, so werden die drei Linien, die vom Contactpunkte der Kreise nach den drei Punkten der Berührenden, nämlich nach dem Berührungspunkte des inneren

und nach den Schnittpunkten mit dem äusseren Kreise, gezogen werden können, mit einander gleiche Winkel einschliessen.«

Im Punkte A (Fig. 92) berühren sich zwei Kreise, deren Mittelpunkte B und C seien; der innere Kreis werde von einer sonst beliebigen Geraden FG im Punkte H berührt, während der grössere in F und G geschnitten werde. Man ziehe AF, AH, AG. Ich behaupte, die von diesen eingeschlossenen Winkel FAH, GAH seien einander gleich. Man verlängere AH bis zur Peripherie in J, und ziehe aus beiden Centren die Linien BH und CJ, desgleichen verbinde man B mit C und verlängere bis zum Contactpunkt A, sowie andererseits bis zu den Peripherien in O und N. Da die Winkel JCN, HBO einander gleich sind, da jeder von ihnen gleich $2JAN$ ist, so müssen BH und CJ einander parallel sein. Da aber BH vom Centrum aus nach dem Berührungspunkte gezogen, senkrecht steht auf FG, so steht auch CJ senkrecht zu FG, folglich ist der Bogen FJ gleich dem Bogen JG, mithin ist auch der Winkel FAJ gleich dem Winkel JAG, w. z. b. w.

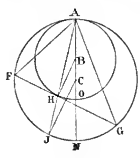


Fig. 92.

Theorem XXI. Propos. XXXII.

»Nimmt man im Horizonte zwei Punkte an und legt eine beliebige Ebene durch den einen von ihnen nach der Seite des anderen hin, verbindet den anderen Punkt mit einem Punkte der Geneigten, der ebenso weit vom Anfangspunkte der letzteren absteht, wie die beiden Punkte im Horizonte, so wird der Fall längs dieser Ebene rascher vor sich gehen, als längs irgend welchen anderen Ebenen, die von demselben Punkte aus nach der Geraden gezogen werden können. Längs anderen Ebenen, die um gleiche Winkel von jener abweichen, sind die Fallzeiten einander gleich.«

Im Horizonte liegen zwei Punkte AB (Fig. 93). Durch B lege man die geneigte Linie BC, auf welcher von B aus das Stück BD gleich BA abgeschnitten werde. Man verbinde A mit D. Ich behaupte, die Fallzeit für AD sei kürzer als die längs anderen Ebenen von A bis zur Geraden BC. Aus den

Punkten A und D ziehe man AE, DE senkrecht zu BA und BD. Der Schnittpunkt sei E. Weil nun im gleichschenkligen Dreieck ABD die Winkel BAD, BDA einander gleich sind, so werden auch die zum Rechten nöthigen Ergänzungswinkel DAE, EDA einander gleich sein; mithin wird ein um E mit EA beschriebener Kreis durch D hindurchgehen und die Geraden BA, BD in den Punkten A, D berühren. Da nun A der obere Endpunkt der Senkrechten AE ist, so ist die Fallzeit für AD kürzer, als für jede andere von A nach BC über die Kreisperipherie hinausreichende Ebene; was zunächst zu beweisen war.

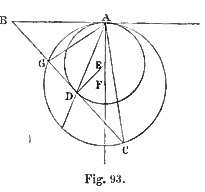


Fig. 93.

Verlängert man die Senkrechte AE und nimmt irgend einen Punkt F als Centrum eines mit dem Radius FA zu beschreibenden Kreises AGC an, der die berührende Linie in G und C schneidet, verbindet man ferner A mit G und C, so bilden diese letzteren mit der Halbirenden AD gleiche Winkel, wie früher bewiesen war, während die Fallzeiten längs beiden Strecken AG, AC einander gleich sind, da sie Sehnen eines Kreises sind.

Probl. XII. Propos. XXXIII.

»Es seien eine Senkrechte und eine Geneigte gegeben, beide von gleicher Höhe, mit gleichem obersten Punkte. Es soll in der Senkrechten oberhalb des gemeinsamen Punktes der Ort angegeben werden, von welchem aus ein Körper fallen müsste, um nach dem Fall aus demselben längs der geneigten Strecke ebenso lange zu fallen, wie längs der ursprünglich gegebenen senkrechten Strecke von der Ruhelage in deren oberstem Punkte aus.«

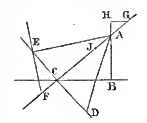


Fig. 94.

Die Senkrechte und die Geneigte gleicher Höhe seien AB, AC (Fig. 94).

Es soll in BA oberhalb A ein Punkt gefunden werden, von dem aus ein Körper erst senkrecht fallend dann die Strecke AC in derselben Zeit durchlaufen würde, in welcher er die Senkrechte AB von der Ruhelage in A aus durchmisst. Man construire DCE senkrecht zu AC, schneide CD gleich AB ab nnd ziehe AD: alsdann wird der Winkel ADC grösser sein, als der Winkel CAD (denn CA ist grösser als AB, oder als CD). Man trage den Winkel DAE gleich ADE bei A an und errichte senkrecht zu AE die Gerade EF, der die geneigte, gehörig verlängerte Ebene in F begegne. Von A aus schneide man AJ und AG gleich CF ab, und ziehe durch G eine dem Horizont parallele Gerade GH. Ich behaupte, H sei der gesuchte Punkt.

Die Fallzeit längs der Senkrechten AB sei AB, so ist diejenige für AC, von der Ruhelage in A aus, gleich AC. Da nun im rechtwinkligen Dreieck AEF vom rechten Winkel E aus EC senkrecht steht zur Basis AF, so ist AE die mittlere Proportionale zu FA, AC und CE die mittlere Proportionale zu AC, CF oder zu CA, AJ. Da nun die Fallzeit für AC, von A aus, gleich AC ist, so ist AE diejenige für die ganze Strecke AF, EC aber diejenige für AJ. Da nun im gleichschenkligen Dreieck AED die Seiten AE, ED einander gleich sind, so ist ED die Fallzeit für AF und EC die Fallzeit für AJ. Mithin ist CD oder AB die Fallzeit für JF von der Ruhelage A aus, d. h. mit anderen Worten: AB ist die Fallzeit für AC von G oder von H aus, welches verlangt war.

Probl. XIII. Propos. XXXIV.

»Eine geneigte Ebene und eine Senkrechte von ein und demselben höchsten Punkte aus seien gegeben. Es soll ein höherer Punkt der Senkrechten bestimmt werden, von dem aus ein Körper herabfallend und alsdann in die geneigte Ebene sich fortbewegend, diesen Weg in derselben Zeit zurücklegt, wie die geneigte Ebene allein vom obersten Punkte aus.«

Die geneigte Ebeue und die Senkrechte seien AB, AC (Fig. 95) mit dem gemeinsamen Anfange A. In der Senkrechten oberhalb A soll ein Punkt gefunden werden, von dem aus ein Körper zuerst senkrecht, dann längs der Geneigten AB sich fortbewegend, diese Bahn in derselben Zeit durchläuft, wie die geneigte Ebene allein vom Punkte A aus.

Man ziehe die horizontale Linie BC und trage AN gleich AC ab; dann mache man AL zu LC, wie AB zu BN, nehme alsdann AJ gleich AL. In der Verlängernng der Senkrechten trage man ein Stück CE an, sodass CE die dritte Proportionale zu AC, BJ. Ich behaupte, CE sei die geforderte Strecke, so zwar, dass, wenn man AX gleich CE am oberen Ende der Senkrechten anfügt, der Körper von X aus die Bahn XAB in derselben Zeit durcheilt, wie die Ebene AB von A aus. Man ziehe die Horizontale XR parallel BC, die der Ebene BA in R begegne, verlängere AB bis D, ziehe ED parallel CB, beschreibe über AD als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in B eine Senkrechte zu DA bis zur Kreisperipherie. Offenbar ist FB die mittlere Proportionale zu AB, BD, und

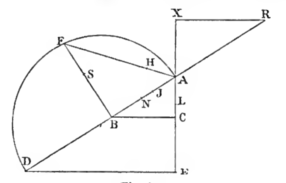


Fig. 95.

die Verbindungsgerade FA die mittlere Proportionale zu DA, AB. Man trage BS gleich BJ ab und FH gleich FB. Nun ist AB zu BD, wie AC zu CE, und BF ist die mittlere Proportionale zu AB, BD, sowie BJ diejenige zu AC, CE; daher verhält sich BA zu AC, wie FB zu BS. Da nun BA zu AC oder BA zu AN, wie FB zu BS, so ist auch BF zu FS, wie AB zu BN oder auch wie AL zu LC. Daher ist das Rechteck aus FB, CL gleich dem Rechteck aus AL, SF; allein dieses letztere Rechteck ist der Ueberschuss des Rechtecks AL, FB oder, was dasselbe ist, des Rechtecks AJ, BF über dem Rechteck AJ, SB oder AJ, JB; andererseits ist das Rechteck FB, LC der Ueberschuss des Rechtecks AC, BF über dem Rechteck AL, BF; aber die Rechtecke AC, BF und AB, BJ sind einander gleich (da BA zu AC sich verhält, wie FB zu BJ), folglich ist der

Ueberschuss des Rechtecks AB, BJ über dem Rechteck AJ, BF oder AJ, FH gleich dem Ueberschuss des Rechtecks AJ, FH über dem Rechteck AJ, JB; mithin ist das Doppelte des Rechtecks AJ, FH gleich der Summe der beiden Rechtecke AB, BJ und AJ, JB: d. h. gleich dem Doppelten von AJ, JB mitsammt dem Quadrate von BJ. Fügt man das beiden gemeinsame Quadrat von AJ hinzu, so wird das Doppelte vom Rechteck AJ, JB sammt den beiden Quadraten von AJ und JB, also einfach das Quadrat von AB, gleich sein dem Doppelten vom Rechteck AJ, FH, mitsammt dem Quadrat von AJ. Fügt man wiederum beiderseits das Quadrat von BF hinzu, so werden die beiden Quadrate von AB und BF, die zusammen gleich dem Quadrat von AF sind, gleich zwei Rechtecken AJ, FH, mitsammt den beiden Quadraten von AJ, FB oder von AJ, FH sein. Aber das Quadrat von AF ist gleich zwei Rechtecken AH, HF mitsammt zwei Quadraten von AH und HF; folglich sind zwei Rechtecke AJ, FH mitsammt den Quadraten von AJ und FH gleich zwei Rechtecken AH, HF mitsammt den Quadraten von AH und HF. Nach Fortnahme des gemeinsamen Quadrates von HF bleiben zwei Rechtecke AJ, FH mitsammt dem Quadrat von AJ gleich zwei Rechtecken AH, HF mitsammt dem Quadrat von AH. Da nun allen Rechtecken die Seite FH gemein ist, muss die Linie AH gleich der Linie AJ sein. Denn wäre sie grösser oder kleiner, so müssten auch die Rechtecke FH, HA und das Quadrat von HA grösser oder kleiner sein als die Rechtecke FH, JA und das Quadrat von JA; was nach dem Vorigen nicht stattfindet.

Wenn nun die Fallzeit für AB gleich AB, so ist diejenige für AC gleich AC, während JB, die mittlere Proportionale zu AC, CE die Fallzeit für CE oder für XA, von X aus, sein wird; da nun zu DA, AB oder zu RB, BA die mittlere Proportionale gleich AF ist, während zu AB, BD oder zu RA, AB die mittlere Proportionale gleich BF ist, dem FH gleich ist, so wird nach dem Vorhergehenden der Ueberschuss AH die Fallzeit für AB, von R aus, sein, oder was dasselbe ist, von X aus; die Fallzeit für AB von A aus aber war gleich AB. Mithin ist die Fallzeit für XA gleich JB; für AB, von R oder von X aus, gleich AJ; mithin ist die Fallzeit für XAB gleich AB, d. h. gleich der für AB von A aus, w. z. b. w.[30]

Probl. XIV. Propos. XXXV.

»Eine gegen eine Senkrechte geneigte Ebene sei gegeben. In der letzteren soll der Ort bezeichnet werden, bis zu dem die geneigte Bahn in derselben Zeit durchlaufen wird, wie längs der Senkrechten mitsammt der geneigten Bahn.«

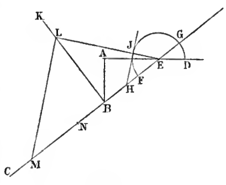


Fig. 96.

Es sei die Senkrechte AB (Fig. 96) und die Geneigte BC. Es soll in BC der Punkt bestimmt werden, bis zu dem die geneigte Strecke in derselben Zeit durchlaufen wird, wie die senkrechte Bahn AB mitsammt der geneigten Strecke. Man ziehe die Horizontale AD, die der geneigten Ebene in E begegne; man trage BF gleich BA ab und schlage um E mit dem Radius EF den Kreis FJG; dann verlängere man FE bis zur Peripherie in G und mache BH zu HF wie BG zu BF; von H ziehe man eine Tangente an den Kreis an den Berührungspunkt J. Darauf errichte man von B aus eine Senkrechte DK zu FC; dieselbe schneide die Linie EJL im Punkte L; endlich ziehe man LM senkrecht zu EL bis zum Schnittpunkte M mit der Geneigten BC. Ich behaupte, dass von B aus die Bahn BM in derselben Zeit durchlaufen werde, wie von A aus die Strecken AB, BM zusammen. Man trage EN gleich EL ab. Da GB zu BF wie BH zu HF, so ist auch GB zu BH wie BF zu FH und auch GH zu HB wie BH zu HF. Deshalb ist das Rechteck GH, HF gleich dem Quadrate von HB: aber dasselbe Rechteck ist auch gleich dem Quadrate von HJ, folglich ist BH gleich HJ. Da nun im Viereck $JLBH$ die Seiten HB, HJ einander gleich sind und die Winkel B und J Rechte sind, so ist auch die Seite BL gleich der Seite LJ; aber EJ ist gleich EF, folglich ist die ganze Strecke LE oder NE gleich der Summe von LB und EF. Zieht man die gemeinsame Strecke EF ab, so bleibt der Rest FN gleich LB. Nun war

FB gleich BA, folglich ist LB gleich der Summe von AB und BN. Sei nun wiederum die Fallzeit für AB gleich AB, so ist diejenige für EB gleich EB: die Fallzeit für EM aber ist EN, nämlich die mittlere Proportionale zu ME, EB; deshalb ist für den Rest BM die Fallzeit, nach EB oder AB, gleich BN. Da nun AB die Fallzeit für AB ist, so ist diejenige längs beiden Strecken ABM gleich ABN. Da ferner die Fallzeit für EB von E aus gleich EB ist, so wird diejenige für BM von B aus gleich der mittleren Proportionale zu BE, BM sein, also BL. Mithin ist die Fallzeit für ABM von A aus gleich ABN; während diejenige für BM allein, von B aus, gleich BL ist, denn es war bewiesen, dass BL gleich der Summe von AB und BN sei, w. z. b. w.[31])

Kürzer folgendermaassen: BC (Fig. 97) sei die Geneigte, BA die Senkrechte. Durch B errichte man eine Senkrechte zu EC nach beiden Seiten und mache BH gleich dem Ueberschuss von BE über BA. Dann mache man den Winkel HEL gleich BHE, die Gerade EL schneide BK in L; von L aus errichte man eine Senkrechte zu EL, LM, welche BC in M schneide. Ich behaupte, BM sei die geforderte Strecke der geneigten Ebene. Da nämlich MLE ein Rechter ist, so wird BL die mittlere Proportionale zu MB, BE sein, sowie LE die mittlere Proportionale zu ME, EB. Man schneide EN gleich EL ab; alsdann sind die drei Linien NE, EL, LH einander gleich und HB wird gleich dem Ueberschuss von NE über BL sein. Aber dieselbe Linie HB ist auch der Ueberschuss von NE über NB sammt BA, folglich ist BL gleich der Summe von NB und BA. Sei nun die Fallzeit für EB gleich EB, so ist BL diejenige für BM von B aus; und BN wird auch die Fallzeit sein für BM nach EB oder nach dem Fall durch AB; AB aber ist die Fallzeit für AB. Folglich ist die Fallzeit für ABM, nämlich ABN gleich der Fallzeit für BM allein von B aus, w. z. b. w. —

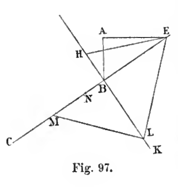


Fig. 97.

Hülfssatz.

Es stehe DC (Fig. 98) senkrecht zum Durchmesser BA, und vom Endpunkte B ziehe man irgendwie BED oder BDE, und verbinde B mit F. Ich behaupte, FB sei die mittlere Proportionale zu DB, BE. Man ziehe EF und durch B eine Tangente BG, welche der Geraden CD parallel sein wird; daher die Winkel DBG und FDB einander gleich sein werden. Aber GBD ist auch gleich EFB, mithin sind die Dreiecke FBD und FEB einander ähnlich; also verhält sich BD zu BF, wie FB zu BE.

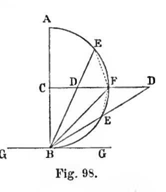


Fig. 98.

Hülfssatz.

Es sei AC (Fig. 99) grösser als die Linie DF, und das Verhältniss von AB zu BC sei grösser, als das Verhältniss von DE zu EF. Ich behaupte, AB sei grösser als DE. Da nämlich AB zu BC grösser als DE zu EF, so mache man DE zu EG (kleiner als EF) wie AB zu BC, und da AB zu BC wie DE zu EG, so verhält sich, wenn man zusammensetzt und umkehrt, GD zu DE wie CA zu AB: aber CA ist grösser als GD, folglich ist BA grösser als DE.

A B C

D E G F

Fig. 99.

Hülfssatz.

Es sei $ACJB$ (Fig. 100) ein Quadrant und AC parallel sei BE gezogen. Aus irgend einem Punkte dieser letzteren Linie werde ein Kreis $BOES$ beschrieben, der AB in B berühre und den Quadranten in J schneide. Man ziehe CB und CJ und verlängere letzteres bis S. Ich behaupte, die Strecke CJ sei stets kürzer als CO. Man verbinde A mit J, so wird diese Ge-

rade den Kreis BOE berühren. Denn wenn man DJ zieht, so wird DJ gleich DB sein. Da aber DB den Quadranten berührt, so wird auch DJ dasselbe thun, und zudem zum Radius AJ senkrecht stehen. Daher berührt auch AJ den Kreis BOE in J. Da nun der Winkel AJC grösser ist als der Winkel ABC, da er einen grösseren Bogen einschliesst, so wird auch

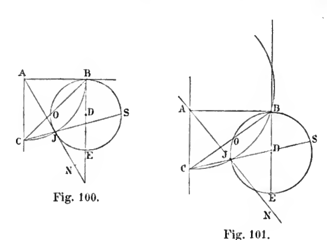


Fig. 100. Fig. 101.

der Winkel SJN grösser sein als der Winkel ABC; daher ist der Bogen JES grösser als BO; und die Linie CS liegt näher zum Centrum als CB: daher ist CO grösser als CJ, denn es verhält sich SC zu CB, wie OC zu CJ.

Dasselbe findet erst recht statt, wenn BJC (Fig. 101) weniger als einen Quadranten beträgt, denn die Senkrechte DB wird den Kreis CJB schneiden: daher auch, da DJ gleich DB ist, der Winkel DJA ein stumpfer sein und AJN den Kreis BJE schneiden wird. Da nun der Winkel ABC kleiner ist als der Winkel AJC, welch letzterer gleich SJN ist, dieser aber kleiner ist als derjenige, den SJ mit der Tangente in J bildet, so wird um so mehr der Bogen SEJ grösser als BO sein, woher das Uebrige folgt.

Theorem XXII. Propos. XXXVI.

»Wenn vom untersten Punkte eines Kreises eine Sehne gezogen wird, die weniger als einen Quadranten spannt, und wenn von den Endpunkten dieser Sehne zwei Linien nach irgend einem Punkte des zwischenliegenden Kreisbogens gezogen werden, so durchläuft ein Körper die beiden letztgenannten Strecken in kürzerer Zeit, als die ganze Sehne, und auch in kürzerer Zeit, als die untere der beiden Strecken allein.

Vom untersten Punkte C (Fig. 102) erstrecke sich der Kreis CBD, kleiner als ein Quadrant, die Sehne CD bilde eine geneigte Ebene; von D und C lege man nach dem Peripheriepunkte B zwei geneigte Ebenen, so behaupte ich, die Fallzeit längs DBC sei kleiner als die für DC und auch kleiner als die für BC, von B aus. Durch D ziehe man die Horizontale MDA, der die verlängerte Linie CB in A begegne. Man ziehe DN, MC senkrecht zum Horizont und BN senkrecht zu BD. Ueber

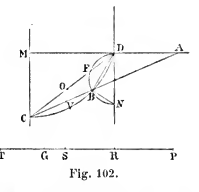


Fig. 102.

dem rechtwinkligen Dreieck DBN beschreibe man den Halbkreis $DFBN$, der DC in F schneide; ferner sei DO die mittlere Proportionale zu CD und DF und AV die mittlere Proportionale zu CA, AB. Es sei nun PS die Fallzeit für die Strecke DC, sowie die für BC (da bekanntlich diese gleich sind); alsdann mache man PR zu PS, wie OD zu CD; alsdann wird PR die Fallzeit für DF, von D aus, sein; RS dagegen die Fallzeit für den Rest FC. Nun aber ist PS auch die Fallzeit für BC von B aus; man mache SP zu PT, wie BC zu CD; alsdann ist PT die Fallzeit für AC von A aus, da CD die mittlere Proportionale ist zu AC, CB, nach früheren Beweisen. Man mache ferner PT zu PG, wie CA zu AV; so ist PT die Fallzeit für AB; GT dagegen ist die übrigbleibende Zeit für die Strecke BC, von A aus. Da aber DN ein zum Horizont senkrechter Durchmesser des Kreises DFN ist, so werden DF und DB in gleichen Zeiten durchlaufen.

Kann also bewiesen werden, dass der Körper die Strecke BC nach dem Falle längs DB schneller durchmesse, als FC nach dem Falle durch DF, so ist das Theorem bewiesen. Nun durchläuft der Körper die Strecke BC mit derselben Geschwindigkeit, ob er aus D längs DB oder ob er aus A längs AB herkommt, da er in beiden Fällen gleiche Geschwindigkeiten erlangt. Mithin bleibt zu zeigen übrig, dass BC nach AB in kürzerer Zeit zurückgelegt werde, als FC nach DF. Wir sahen, dass die Fallzeit für BC, nach AB, gleich GT sei, während diejenige für FC, nach DF, gleich RS war. Also muss noch bewiesen werden, dass RS grösser ist als GT, was folgendermaassen gelingt: es verhält sich SP zu PR, wie CD zu DO und RS zu SP wie OC zu CD; wie aber SP zu PT, so verhält sich DC zu CA. Da ferner TP zu PG wie CA zu AV, so verhält sich auch PT zu TG wie AC zu CV, folglich verhält sich RS zu GT wie OC zu CV. Nun ist aber OC grösser als CV, wie sogleich bewiesen werden soll, folglich ist die Zeit RS grösser als die Zeit GT, w. z. b. w. — Da CF grösser ist als CB, FD aber kleiner als BA; so ist das Verhältniss CD zu DF grösser als das von CA zu AB; aber wie CD zu DF, so verhalten sich die Quadrate von CO und OF, da DO die mittlere Proportionale zu CD und DF ist. Wie ferner CA zu AB, so verhalten sich die Quadrate von CV und VB. Folglich ist das Verhältniss von CO zu OF grösser als das von CV zu VB. Nach dem vorigen Hülfssatz folgt mithin, dass CO grösser sei als CV. — Ausserdem sieht man, dass die Fallzeit für DC sich zu der für DBC verhalte, wie DOC zur Summe von DO und CV.[32])

Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden kann erschlossen werden, dass die schnellste Bewegung von einem Punkte zu einem anderen nicht längs der kürzesten Linie, der geraden, zu Stande komme, sondern längs des Kreisbogens. Denn den Quadranten $BAEC$ (Fig. 103), dessen Seite BC senkrecht zum Horizont stehe, theile man in beliebig viele gleiche Theile AD, DE, EF, FG, GC; dann verbinde man durch gerade Linien die Theilpunkte A, D, E, F, G mit C; ferner ziehe man AD, DE, EF, FG, GC. Offenbar geschieht die Bewegung längs ADC schneller als längs AC oder längs DC von D aus: aber von A aus

wird DC schneller durchlaufen, als beide Strecken ADC: durch zwei Strecken DEC, von A aus, schneller als durch CD allein. Folglich ist die Fallzeit für drei Strecken $ADEC$ kürzer als für zwei ADC. Aehnlich wird nach dem Falle durch ADE die Bewegung längs EFC rascher erfolgen, als längs FC allein. Mithin durch vier Strecken $ADEFC$ rascher, als durch drei $ADEC$. Und endlich durch zwei Strecken FGC nach dem Falle durch $ADEF$ rascher, als durch FC allein. Mithin durch fünf Strecken $ADEFGC$ rascher, als durch vier $ADEFC$. Je näher also das eingeschriebene Polygon sich an die Peripherie anschliesst, um so rascher kommt die Bewegung von A nach C zu Stande. Was aber für den Quadranten bewiesen ist, gilt auch für kleinere Bögen; und das ist das Theorem.[33]

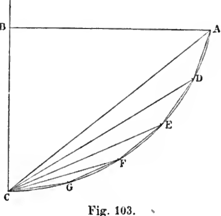


Fig. 103.

Probl. XV. Propos. XXXVII.

»Eine Senkrechte und eine Geneigte gleicher Höhe seien gegeben: es soll ein Stück der Geneigten bestimmt werden, an Länge gleich der Senkrechten, längs welcher die Bewegung in derselben Zeit erfolgt, wie in der Senkrechten.«

Es sei AB (Fig. 104) die Senkrechte, AC die geneigte Ebene. Es soll auf letzterer eine Strecke gleich AB gefunden werden, welche von A aus in derselben Zeit durchlaufen werde, wie die Senkrechte AB. Man mache AD gleich AB; den Rest DC halbire man in J, mache AE zu CJ, wie CJ zu AC und trage DG gleich AE ab. Offenbar wird alsdann EG gleich AD und gleich AB sein. Ich behaupte, EG sei die Strecke, die bei dem Falle von A aus in derselben Zeit durchlaufen werde, wie die Senkrechte AB. Denn es verhält sich AC zu CJ wie CJ zu AE oder wie JD zu DG, folglich auch CA zu AJ

wie DJ zu JG. Da nun CA zu AJ wie CJ zu JG, so ist auch der Ueberschuss von CA über CJ, d. h. JA, zum Ueberschuss von AJ über JG, d. h. AG, wie CA zu AJ. Mithin ist AJ die mittlere Proportionale zu CA, AG, und CJ diejenige zu CA, AE. Wenn nun die Fallzeit für AB gleich AB, so ist AC diejenige für AC und CJ oder JD diejenige für AE. Da nun AJ die mittlere Proportionale ist zu CA, AG und CA die Fallzeit für CA, so ist AJ diejenige für AG; und der Rest JC ist die Fallzeit für den Rest GC: es war aber DJ die Fallzeit für AE, folglich sind DJ, JC die Fallzeiten für AE und CG; mithin ist der Rest DA die Fallzeit für EG und zugleich diejenige für AB, was verlangt war.[34]

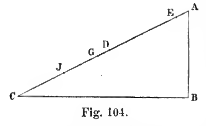


Fig. 104.

Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die geforderte Strecke zwischen einer oberen und unteren Strecke liegt, die in gleichen Zeiten durchlaufen werden.[35]

Probl. XVI. Propos. XXXVIII.

»Zwei horizontale Ebenen seien von einer Senkrechten geschnitten; es soll in der letzteren ein Punkt gefunden werden, von welchem aus Körper zuerst senkrecht fallend, dann in die Horizontalen einlenkend, in diesen letzteren in gleichen Zeiten Strecken zurücklegen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.«

Die horizontalen Ebenen CD, BE (Fig. 105) seien von der Senkrechten ACB geschnitten, und das gegebene Verhältniss sei das der kleineren Strecke N zur grösseren FG. Es soll in der Senkrechten ein höherer Punkt bestimmt werden, von dem aus ein fallender und nach CD abgelenkter Körper in einer Zeit, die gleich seiner Fallzeit ist, eine horizontale Strecke zurücklegt, die sich zu derjenigen, die der andere Körper, nach-

dem er von demselben Punkte aus in die andere Horizontale BE abgelenkt worden in einer Zeit, die gleich ist seiner Fallzeit, in der anderen Horizontalen zurücklegt, verhält, wie N zu FG. Man mache GH gleich N, und construire CL zu BC, wie FH zu HG. Ich behaupte, L sei der geforderte Punkt. Macht man nämlich CM gleich $2\,CL$ und zieht LM, welches die Ebene BE in O schneidet, so wird auch BO gleich $2BL$ sein. Da nun FH zu HG wie BC zu CL, so ist auch HG oder N zu GF, wie CL zu LB, d. h. wie CM zu BO. Da nun CM gleich $2\,LC$, so ist CM die Strecke, die der Körper von L aus, nach dem Fall durch LC, in der Horizontalen CD zurücklegt; ebenso ist BO die Strecke, die nach dem Falle durch LB in der Fallzeit für LB durchlaufen wird, da BO gleich $2\,BL$, woraus die Lösung folgt.

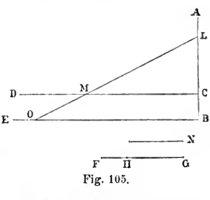


Fig. 105.

Sagr. Wahrlich, mir scheint, es muss unserem Akademiker zugestanden werden, dass er ohne Prahlerei sich das Verdienst zuschreiben konnte, eine neue Kenntniss über einen sehr alten Gegenstand erschlossen zu haben. Wie er mit Glück und Geschick aus einem einzigen einfachen Princip eine Fülle von Theoremen gewinnt, das macht mich staunen; und wie konnte das Gebiet unberührt bleiben von *Archimedes*, *Apollonius*, *Euclid* und noch vielen anderen Mathematikern und berühmten Philosophen, und doch sind über die Bewegung gewaltig dicke Bände in grosser Zahl geschrieben worden.

Salv. Bei *Euclid* findet man ein Fragment über die Bewegung, aber man entdeckt nicht den Weg, den er betreten, um die Verhältnisse der Beschleunigung und die Beziehungen bei verschiedenen Neigungen zu ergründen. Deshalb kann man wohl behaupten, dass erst jetzt die Thore geöffnet sind zu einer neuen Methode, die eine endlose Menge bemerkenswerther Untersuchungen ermöglicht, wie solche in der Zukunft andere Kräfte anstellen können.

Sagr. Wahrlich, ich glaube, dass, sowie die wenigen Eigenschaften des Kreises, die beispielsweise im dritten Buch der

Elemente des *Euclid* bewiesen werden, die Stütze bilden für zahlreiche andere, noch verborgene Beziehungen, gerade so die hier in dieser kurzen Abhandlung vorgeführten Sätze, wenn sie in die Hände anderer denkender Forscher gerathen, immer wieder neuen wunderbaren Erkenntnissen den Weg bahnen werden; und es wäre denkbar, dass in solcher Weise die würdevolle Behandlung des Gegenstandes allmählich auf alle Gebiete der Natur sich erstrecken dürfte.

Der heutige Tag war lang und ziemlich mühevoll; ich habe mehr Gefallen gefunden an den Sätzen, als an den Beweisen, denn um letztere mir gründlich anzueignen, werde ich einem jeden mehr als eine Stunde widmen müssen; solches Studium behalte ich mir für die Mussezeit bevor und bitte Euch um das Buch, wenn wir das Uebrige über den Wurf werden kennen gelernt haben, was, wenn es Euch so recht ist, an dem nächsten Tage geschehen könnte.

Salv. Ich werde Euch zu Diensten stehen.

Ende des dritten Tages.

Vierter Tag.

Salv. Da kommt ja Herr *Simplicio* noch zu rechter Zeit. So wollen wir denn ohne weiteres zur Bewegung übergehen. Hier ist der Text unseres Autors:

Ueber die Wurfbewegung.

Wir haben bisher die gleichförmige Bewegung und die natürlich beschleunigte, längs geneigten Ebenen, behandelt. Im Nachfolgenden wage ich es, einige Erscheinungen und einiges Wissenswerthe mit sicheren Beweisen vorzuführen über Körper mit zusammengesetzter Bewegung, einer gleichförmigen nämlich und einer natürlich beschleunigten; denn solcher Art ist die Wurfbewegung und so lässt sie sich erzeugt denken.

Wenn ein Körper ohne allen Widerstand sich horizontal

bewegt, so ist aus allem Vorhergehenden, ausführlich Erörterten bekannt, dass diese Bewegung eine gleichförmige sei und unaufhörlich fortbestehe auf einer unendlichen Ebene: ist letztere hingegen begrenzt und ist der Körper schwer, so wird derselbe, am Ende der Horizontalen angelangt, sich weiter bewegen, und zu seiner gleichförmigen unzerstörbaren Bewegung gesellt sich die durch die Schwere erzeugte, so dass eine zusammengesetzte Bewegung entsteht, die ich Wurfbewegung (projectio) nenne und die aus der gleichförmig horizontalen und aus der gleichförmig beschleunigten zusammengesetzt ist. Hierüber wollen wir einige Betrachtungen anstellen.

Theorem I. Propos. I.

Ein gleichförmig horizontaler und zugleich gleichförmig beschleunigter Bewegung unterworfener Körper beschreibt eine Halbparabel.

Sagr. Wir müssen, Herr *Salviati*, um meinet- und wohl, wie ich glaube, Herrn *Simplicio*'s willen, ein wenig Halt machen, da ich nicht so tief in die Geometrie eingedrungen bin, dass ich den *Apollonius* beherrsche, der, so viel ich weiss, über diese Parabeln und über die anderen Kegelschnitte geschrieben hat, und ohne deren Kenntniss wohl kaum die folgenden Lehrsätze verständlich sein dürften. Da schon gleich in dem ersten schönen Theorem der Autor uns die Wurflinie als Parabel vorführen will, so scheint mir, dass wir zunächst über diese Linien handeln sollten, um dieselben gründlich zu kennen, und wenn auch nicht alle von *Apollonius* bewiesenen Eigenschaften, so doch wenigstens diejenigen zu erörtern, die im Nachfolgenden als bekannt vorausgesetzt werden.

Salv. Sie sind gar zu bescheiden, wenn Sie nochmals durchnehmen wollen, was Sie kürzlich als Ihnen völlig bekannt bezeichnet haben. Ich erinnere Sie daran, dass in unseren Unterredungen über die Festigkeit wir einen Satz des *Apollonius* brauchten, der uns keine Schwierigkeiten bereitete.

Sagr. Es kann sein, dass ich ihn noch kannte und ihn für jenen Zweck gelten liess, so weit es nothwendig erschien; hier aber, wo wir viele Sätze über solche Linien kennen lernen sollen, müssen wir mit der Zeit und Anstrengung nicht gar zu sehr geizen (non bisogna, come si dice, bevere grosso, buttando via il tempo e la fatica).

Simpl. Und was mich betrifft, — wenn auch Herr *Sagredo* gut gerüstet ist, — mir steigen wiederum die früheren Schranken auf: denn wenn auch unsere Philosophen diesen Gegenstand in der Lehre vom Wurf behandelt haben, so erinnere ich mich doch nicht, dass sie jene Curven beschrieben hätten, sie bezeichnen sie vielmehr nur sehr allgemein als krumme Linien, ausgenommen den senkrechten Fall. Und ferner, wenn das Wenige an Geometrie, das ich dann und wann während unserer Unterredungen aus dem *Euclid* erlernt habe, nicht zum Verständniss des Folgenden hinreicht, so würde ich die Theoreme wohl gläubig annehmen, aber nicht völlig erfassen können.

Salv. Ihr werdet dann Dank wissen unserem Autor, der, als er mir einen Einblick in seine Studie gestattete, da ich damals die Bücher des *Apollonius* nicht zur Hand hatte, zwei Haupteigenschaften jener Parabel ohne irgend welche Voraussetzungen erklärte, Eigenschaften, auf die wir uns in vorliegender Abhandlung stützen werden, die auch von *Apollonius* gut bewiesen sind, aber unter vielen anderen, die kennen zu lernen uns viel Zeit kosten würde; ich aber hoffe unseren Weg zu kürzen, wenn ich die erste Eigenschaft sofort aus der einfachen Erzeugung der Parabel herleite, und darauf unmittelbar den Beweis für die zweite anschliesse. Zunächst also die erste Eigenschaft: Man denke sich einen geraden Kegel mit der kreisförmigen Basis $JBKC$ (Fig. 106) und mit dem Gipfel L. Eine Ebene parallel der Seite LK schneide den Kegel und erzeuge den Parabelschnitt BAC, dessen Basis BC den Durchmesser JK des Kreises $JBKC$ rechtwinklig schneidet, und es sei die Parabelaxe parallel der Seite LK. Man nehme einen beliebigen Punkt F der Curve BFA und ziehe FE parallel zu BD. Ich behaupte, das Quadrat von BD verhalte sich zum Quadrate von FE wie die Axe DA zum Stück AE. Durch den Punkt E denke man sich eine Ebene parallel dem Kreise $JBKC$ gelegt, so wird dieselbe den Kegel in einem Kreise schneiden, dessen Durchmesser GEH sein wird. Da nun zum Durchmesser JK des Kreises $JBKC$ die Gerade BD senkrecht

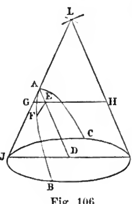


Fig. 106.

steht, so ist das Quadrat von BD gleich dem Rechteck JD, DK. Desgleichen wird im oberen durch GFH gedachten Kreise das Quadrat von FE gleich sein dem Rechteck GE, EH. Folglich verhalten sich die Quadrate von BD, FE wie die Rechtecke JD, DK und GE, EH. Da aber ED parallel HK, so ist die Linie EH gleich DK, da beide einander parallel sind; ferner werden die Rechtecke JD, DK und GE, EH sich verhalten wie JD zu GE, d. h. wie DA zu AE. Also verhalten sich die Rechtecke JD, DK und GE, EH oder die Quadrate von BD und FE wie die Axe DA zum Stück AE, w. z. b. w.

Der zweite Satz, dessen wir bedürfen, ist der folgende: Verzeichnen wir die Parabel und verlängern ihre Axe CA (Fig. 107) nach aussen nach D hin, ziehen dann durch den beliebigen Punkt B eine Linie BC parallel der Parabelbasis, und schneiden DA ab gleich CA, alsdann, behaupte ich, wird eine Gerade, die D und B verbindet, nicht die Parabel schneiden, sondern ausserhalb bleiben, so dass sie dieselbe im Punkte B nur berührt. Denn angenommen, es sei möglich, dass diese Gerade die Parabel oberhalb oder dass ihre Verlängerung unterhalb sie treffe, so nehme man einen Punkt G und ziehe die Gerade FGE. Da nun das Quadrat von FE grösser ist als das Quadrat von GE, so ist das Verhältniss der Quadrate von FE und BC grösser als das der Quadrate von GE und BC. Da nun nach dem vorigen Satze die Quadrate von FE und BC sich verhalten wie EA zu AC, so ist das Verhältniss EA zu AC grösser als das der Quadrate von GE und BC, also auch als das der Quadrate von ED und DC (da im Dreieck DGE sich GE zur Parallelen BC verhält, wie ED zu DC). Aber EA zu AC oder AD, wie vier Rechtecke EA, AD zu vier Quadraten von AD, d. h. zum Quadrate von CD (welches gleich vier Quadraten von AD), folglich haben vier Rechtecke EA, AD zum Quadrate von CD ein grösseres Verhältniss, als die Quadrate von ED und DC; mithin wären vier Rechtecke EA, AD grösser als das Quadrat von ED, was unrichtig ist, da sie vielmehr kleiner sind; denn die Theile EA, AD der Linie ED

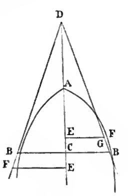


Fig. 107.

sind ungleich. Aus Allem folgt, dass DB die Parabel berühre in B und nicht schneide, w. z. b. w.

Simpl. Ihr geht in Euren Beweisen gar vornehm vor; so viel mir scheint, setzt Ihr immer voraus, dass alle *Euclid*'schen Sätze mir eben so geläufig seien, wie seine Axiome, was aber keineswegs zutrifft. Soeben ist mir entgangen, warum vier Rechtecke EA, AD kleiner sind als das Quadrat von ED, wenn die Theile EA, AD der Linie ED ungleich sind. Ich zweifle noch an der Richtigkeit der Behauptung.

Salv. Wahrhaftig, alle geschulten (non vulgari) Mathematiker pflegen anzunehmen, dass dem Leser wenigstens die Elemente des *Euclid* völlig geläufig seien; Euch zu dienen wird genügen daran zu erinnern, dass, wenn eine Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird und abermals in ungleiche Theile, das Rechteck aus letzteren kleiner ist als das aus den gleichen Theilen gebildete (d. h. als das Quadrat der Hälfte) um so viel, als das Quadrat der Strecke zwischen beiden Theilpunkten beträgt, woraus folgt, dass das Quadrat der ganzen Strecke, welches vier Quadraten der halben gleich ist, grösser ist als vier Rechtecke aus den ungleichen Theilen. Die bewiesenen zwei Sätze aus den Elementen der Kegelschnitte müssen wir im Gedächtniss haben, wenn wir die Theoreme der folgenden Abhandlung verstehen wollen, denn auf diese allein fusst der Autor. Jetzt können wir auf unseren Text zurückkommen, wo im ersten Theorem behauptet wird, die aus der gleichförmigen horizontalen und aus der natürlich beschleunigten Bewegung zusammengesetzte Linie sei eine Halbparabel.

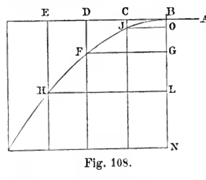


Fig. 108.

Man denke sich eine Horizontale oder eine horizontale Ebene AB (Fig. 108), längs welcher ein Körper sich gleichförmig bewege. Am Ende derselben fehlt die Stütze, und der Körper in Folge seiner Schwere unterliegt einer Bewegung längs der Senkrechten BN. Man denke sich AB nach E hin fortgesetzt, und theile gewisse gleiche Strecken BC, CD, DE ab. Von den Punkten B, C, D, E ziehe man Linien parallel BN in gleichen Abständen. In der ersten von C aus nehme man

eine beliebige Strecke CJ, in der folgenden das vierfache DF, dann das neunfache EH, u. s. f. Stücke, die den Quadraten entsprechen. Wenn der Körper von B gleichförmig nach C gelangte, so denken wir uns das durch den Fall bedingte Stück CJ angefügt; der Körper wird in der Zeit BC im Punkte J sich befinden. Weiter würde in der Zeit DB, gleich $2\,BC$, die Fallstrecke gleich $4\,CJ$ sein, denn in der vorigen Abhandlung ist bewiesen, dass die bei gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegten Strecken sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Aehnlich wird EH in der Zeit BE durchlaufen, gleich $9\,CJ$, da EH, DF, CJ sich verhalten wie die Quadrate der Linien EB, DB, CB. Zieht man von J, F, H Gerade JO, FG, HL parallel EB, so werden HL, FG, JO je den Strecken EB, DB, CB gleich sein, so wie auch BO, BG, BL den Strecken CJ, DF, EH. Nun verhalten sich die Quadrate von HL und FG wie dio Strecken LB, BG, und die Quadrate von FG, JO wie GB, BO. Folglich liegen die Punkto J, F, H in einer Halbparabel. Aehnlich wird bei Annahme irgend welcher anderer beliebiger Strecken und entsprechender Zeitgrössen bewiesen, dass die in ähnlicher Weise bestimmton Orte stets in einer und derselben Parabel liegen, womit das Theorem bewiesen ist.

Salv. Diese Schlussfolgerung gewinnt man durch Umkehrung des crsten der oben betrachteten Hülfssätze. Beschreibt man nämlich durch die Punkte B und H eine Parabel, so würden sonst die Punkte F, J nicht auf derselben, sondern innerhalb oder ausserhalb liegen, und mithin wäre FG kleiner oder grösser als die bis zur Parabel reichende Linie, und die Quadrate von HL und FG würden ein grösseres oder kleineres Verhältniss haben, als die Linien LB und BG, während das Quadrat von HL wohl dieses selbe Verhältniss zum Quadrat von FG hat; mithin liegt F in der Parabel, und ähnlich alle anderen Punkte.

Sagr. Wahrlich, diese Betrachtung ist neu, geistvoll und schlagend; sie stützt sich auf eine Annahme, auf diese nämlich, dass die Transversalbewegung sich gleichförmig erhalte, und dass eben so gleichzeitig die natürlich beschleunigte Bewegung sich behaupte, proportional den Quadraten der Zeiten, und dass solche Bewegungen sich zwar mengen, aber nicht stören, ändern und hindern, so dass schliesslich bei fortgesetzter Bewegung die Wurflinie nicht entarte; ein mir kaum fassliches Vorhalten. Donn da die Axe unserer Parabel, längs welcher die Be-

schleunigung statthat, senkrecht zum Horizonte steht, so reicht sie bis zum Mittelpunkte der Erde. Die Parabel aber entfernt sich immer mehr von ihrer Axe, und es könnte kein Körper den Mittelpunkt der Erde erreichen; und wenn er es thäte, wie doch zu sein scheint, so müsste die Wurflinie gänzlich von der Parabel abweichen.

Simpl. Zu dieser Schwierigkeit muss ich noch andere hinzufügen: erstens nehmen wir an, dass die horizontale Ebene, die weder ab- noch ansteigt, durch eine gerade Linie dargestellt werde, als ob die Theile einer solchen überall gleich weit vom Centrum abstünden, was denn doch nicht der Fall ist, da wir vom Anfangspunkte nach beiden Seiten Theile finden, die immer mehr abweichen und gar ansteigen. Hieraus folgt, dass auf solcher Ebene die Bewegung nicht gleichförmig sein könne; sie wird vielmehr auf keiner noch so kurzen Strecke sich gleich bleiben, sondern stets sich vermindern. Ausserdem halte ich es für unmöglich, den Widerstand des Mediums zu umgehen; so dass auch die Beständigkeit der Transversalbewegung und die Gesetze der Beschleunigung beim freien Fall nicht zur Geltung kommen können. Auf Grund dieser Bedenken halte ich es für sehr unwahrscheinlich, dass die bewiesenen Sätze, bei all den ungültigen Voraussetzungen, in praktischen Versuchen sich bewähren.

Salv. All die vorgebrachten Schwierigkeiten und Einwürfe sind so wohlbegründet, dass man sie nicht hinwegräumen kann; ich gestehe sie zu, und ich glaube, unser Autor würde dasselbe thun. Ja, ich gebe noch ferner zu, dass unsere abstrakt gezogenen Schlüsse in Wirklichkeit sich anders darstellen und dermaassen falsch sein werden, dass weder die Transversalbewegung gleichförmig, noch die beschleunigte Bewegung in dem angenommenen Verhältniss zu Stande komme, ja dass auch die Wurflinie keine Parabel sei. Nun aber verlange ich, dass Sie, meine Herren, unserm Autor nicht das verwehren und bestreiten, was andere bedeutende Männer angenommen haben, trotzdem es nicht richtig war. Auch kann die Autorität des Archimedes Jedermann beruhigen. Er hat in seiner Mechanik bei der ersten Inhaltsbestimmung der Parabel als wahres Princip angenommen, dass der Wagebalken eine gerade Linie sei, deren Punkte alle gleich weit vom gemeinsamen Centrum aller schweren Körper seien, und dass die Richtungen, nach welchen die Körper fallen, alle einander parallel seien. Solche Licenz wird gebilligt, weil unsere Apparate und die angewandten Strecken sehr klein

sind im Vergleich zu der bedeutenden Entfernung vom Mittelpunkte der Erdkugel, so dass wir einen sehr kleinen Bogentheil eines grössten Kreises als gerade, und zwei Senkrechte an den Enden dieses Bogens als einander parallel annehmen können. Wollten wir im Versuche solche kleine Grössen berücksichtigen, so müssten wir die Architekten tadeln, welche mit ihrem Senkloth die höchsten Thürme zwischen parallelen Linien zu errichten annehmen. Auch können wir sagen, dass *Archimedes* und Andere ebenso in ihren Betrachtungen angenommen haben, dass sie unendlich weit vom Centrum entfernt seien; in diesem Falle sind die Voraussetzungen richtig und die Beweise stichhaltig. Wollen wir aber in endlichen Entfernungen Versuche anstellen, und sehr grosse Werthe annehmen, so müssen wir vom wahren Erwiesenen das abziehen, was wegen der nicht unendlichen Entfernung zu berücksichtigen ist, wenn auch die Entfernung immer noch sehr gross ist im Vergleich zu der Kleinheit unserer Vorrichtungen. Die grosse Abweichung ist beim Wurf der Geschosse zu erwarten, und zwar bei denen der Artillerie; die Wurfweite wird höchstens vier Meilen betragen, während wir ungefähr eben so viel Tausend von Meilen vom Erdcentrum entfernt sind; und wenn jene auf der Oberfläche der Erde abgemessen werden, so wird die parabolische Linie nur wenig verändert sein, aber in der That sich so umwandeln, dass sie durch das Centrum der Erde hindurchginge. In Betreff des Widerstandes des Mediums gestehe ich zu, dass dessen störender Einfluss bemerklicher sein wird, und wegen seiner mannigfach verschiedenen Beschaffenheit kaum unter feste Regeln gebracht werden kann; so lange wir auch nur den Widerstand der Luft berücksichtigen, so wird dieser alle Bewegungen stören, auf unendlich verschiedene Weise, da unendlich verschieden Gestalt, Gewicht und Geschwindigkeit der geworfenen Körper sich ändern könnten. Wenn z. B. die Geschwindigkeit grösser ist, so wird auch der Einfluss der Luft wachsen, und das zwar um so mehr, je leichter die Körper sind, sodass, obwohl die Strecken bei senkrechtem Fall sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten sollten, dennoch selbst die allerschwersten Körper von bedeutender Höhe herab solchen Widerstand von der Luft erfahren, dass die Beschleunigung gänzlich aufhört und die Bewegung eine gleichförmige wird; letzteres tritt um so früher ein, und von um so geringeren Höhen, je leichter die Körper sind. Auch die Horizontalbewegung, die ohne allen Widerstand gleichförmig und beständig sein müsste, wird durch den Luftwiderstand

vermindert und schliesslich vernichtet, und das zwar widerum um so schneller, je leichter der Körper ist. Ueber alle die unendlich verschiedenen Möglichkeiten hinsichtlich der Schwere, der Geschwindigkeit und der Gestalt kann keine Theorie gegeben werden. Uebrigens muss selbst, um diesen Gegenstand wissenschaftlich zu handhaben, zuerst von demselben abstrahirt werden, es müssen, abgesehen von Hindernissen, die bewiesenen Theoreme praktisch geprüft werden, innerhalb der Grenzen, die die Versuche uns selbst vorschreiben. Der Nutzen wird nicht gering sein, denn Stoff und Gestalt werden so gewählt werden können, dass der Widerstand möglichst gering sei, d. h. wir werden recht schwere und runde Körper wählen: dabei sollen die Strecken sowohl, als auch die Geschwindigkeiten nicht so exorbitant gross sein, dass wir sie nicht mehr genau zu messen vermöchten. Selbst bei Geschossen, deren wir uns bedienen, von schweren Substanzen und bei runder Gestalt, ja selbst bei weniger schweren Körpern von cylindrischer Gestalt, wie z. B. bei Pfeilen, die mit Schleudern oder mit der Armbrust abgeschossen werden, wird die Abweichung von der genauen Parabel ganz unmerklich sein. In unseren Experimenten wird die Kleinheit derselben eine solche sein, dass äussere Nebenwirkungen, unter denen die des Luftwiderstandes die bedeutendste ist, ganz unmerklich werden, und davon will ich Euch durch zwei Versuche überzeugen. Ich werde die Bewegungen in der Luft behandeln, wie wir solche schon besprochen haben, bei welchen die Luft zweierlei Einwirkung ausübt. Erstlich werden die leichteren Körper stärker beeinflusst, als die sehr schweren. Dann übt die Luft bei grösserer Geschwindigkeit einen stärkeren Widerstand aus, als bei geringerer Geschwindigkeit eines und desselben Körpers. Hinsichtlich des ersten Umstandes lehrt der Versuch, dass zwei gleich grosse Stäbe, deren einer zehn bis zwölf mal schwerer als der andere ist (z. B. der eine aus Blei, der andere aus Eichenholz), aus einer Höhe von 150 oder 200 Ellen mit kaum merklich verschiedener Geschwindigkeit an der Erde anlangen, woraus wir sicher schliessen, dass bei beiden Körpern der Luftwiderstand gering ist; und wenn beide Stäbe gleichzeitig zu fallen beginnen, dabei aber der Bleistab wenig, der Holzstab stark verzögert wäre, der erstere beim Fallen merklich dem letzteren vorauseilen müsste, während er zugleich zehn mal schwerer ist; dieses aber tritt keineswegs ein, sein Vorauseilen wird nicht einmal den hundertsten Theil der ganzen Höhe betragen. Zwischen einem Blei- und einem Steinstabe,

der nur ein Drittel oder die Hälfte von jenem wöge, würde beim Aufprall auf die Erde kaum noch ein Unterschied zu beobachten sein. Da nun die Geschwindigkeit, die ein Bleistab beim Sturz aus einer Höhe von 200 Ellen erlangt (d. h. eine solche, dass bei fortgesetzter gleichförmiger Bewegung 400 Ellen in derselben Fallzeit durchlaufen würden), recht bedeutend ist im Vergleich zur Geschwindigkeit, die wir mit dem Bogen oder anderen Vorrichtungen unseren Geschossen (ausgenommen die Feuerwaffen) ertheilen, so können wir nicht weit fehlgehen, und können die Sätze, die wir ohne Beachtung des Widerstandes beweisen, als absolut wahr gelten lassen. Hinsichtlich des zweiterwähnten Punktes, demgemäss ein und derselbe Körper bei grosser und bei kleiner Geschwindigkeit nicht sehr verschiedenen Widerstand erleidet, erfahren wir solches aus folgendem Versuche. An zwei gleich langen Fäden von 4 oder 5 Ellen Länge befestigen wir zwei Bleikugeln. Die eine erheben wir alsdann um einen Bogen von 80 Grad oder mehr, die andere um 4 oder 5; losgelassen beschreibt die eine sehr grosse Bögen von 160, 150, 140 Grad, die langsam kleiner werden; die andere, frei schwingend, vollführt kleine Bögen von 10, 8, 6 Grad, bei langsamer Abnahme derselben. Ich behaupte nun, die grossen Bögen von 180, 160 Grad werden in derselben Zeit durchlaufen, wie die kleinen von 10, 8 Grad. Offenbar ist die Geschwindigkeit der ersteren 16, 18 mal grösser, als die der zweiten; sodass, wenn erstere stärkeren Luftwiderstand erführe, als die zweite, die Schwingungen geringer an Zahl sein müssten bei den grossen Bögen von 180, 160 Grad, als bei den kleinen von 10, 8, 4, ja sogar von 2 und 1 Grad; dem aber widerspricht der Versuch: denn wenn Beobachter die Schwingungen zählen, der eine die grossen, der andere die kleinen, so werden sie nicht bei der zehnten, ja auch nicht bei der hundertsten um eine Schwingung abweichen. Dieser Versuch bestätigt uns zugleich beide Sätze, dass nämlich grosse und kleine Schwingungen stets in gleichen Zeiten erfolgen, und dass der Widerstand der Luft bei grosser und kleiner Geschwindigkeit gleichen Einfluss ausübt, im Gegensatz zu dem, wie es uns zuerst erschien und was wir schlechthin glaubten.

Sagr. Aber warum sollen wir nicht annehmen, dass die Luft diese und jene hemme, da doch beide langsamer werden und erlöschen; daher müssen wir sagen, dass die Verzögerungen in gleichem Verhältnisse stattfinden. Aber wie? Wenn das eine Mal der Widerstand grösser ist, als das andere Mal, wovon

anders kann das abhängen, als dass dort eine grössere, hier eine kleinere Geschwindigkeit ertheilt worden ist? Und da das sich so verhält, so ist eben der Geschwindigkeitsbetrag die Ursache und zugleich das Maass des Widerstandes. Mithin werden alle Bewegungen, kleine und grosse, verzögert und gehemmt in eben demselben Verhältniss; diese Erkenntniss scheint mir wichtig zu sein.

Salv. Wir können aber anch in diesem Falle schliessen, dass die Abweichungen von den Sätzen, die wir, von äusseren Znfälligkeiten absehend, beweisen, nur geringfügig seien im Hinblick auf Bewegungen mit grosser Geschwindigkeit, über welche am meisten gehandelt werden soll, nnd auch in Hinsicht auf die Strecken, die sehr klein sind im Vergleich zum Halbmesser und zu den grössten Kreisen der Erdkugel.

Simpl. Ich möchte gern wissen, warum Sie die Feuergeschosse ausnehmen; die mit Pulverkraft, glaube ich, unterliegen anderen Aendernngen und Hemmnissen, als die mit Armbrust oder Bogen geschleuderten.

Salv. Mich veranlasst dazn die nngeheure, soznsagen übernatürliche Wucht solcher Geschosse; dass ich selbst ohne Uebertreibnng sagen möchte, dass die Geschwindigkeit, mit der eine Flinten- oder Kanonenkngel den Lauf verlässt, übernatürlich genannt werden könnte. Denn wenn von bedentender Höhe eine solche Kugel senkrecht herabfiele, so würde ihre Geschwindigkeit in Folge des Luftwiderstandes nicht stets zunehmen; es würde vielmehr das eintreten, was bei leichten Körpern schon bei geringen Fallhöhen eintritt, dass nämlich die Bewegung schliesslich gleichförmig wird; das würde bei einigen Tausend Ellen Fallhöhe auch bei einer Eisen- oder Bleikngel eintreten, und diese letzte oder Endgeschwindigkeit (terminata velocità) kann man als die grösste annehmen, die solch ein Körper beim Fall durch die Luft zu erhalten vermag; und diese Geschwindigkeit halte ich für geringer, als die durch das Pulver ertheilte. Darüber kann uns ein passender Versuch Gewissheit schaffen. Man schiesse aus einer Höhe von 100 oder mehr Ellen mit einer Armbrust einen Bleistab senkrecht hinab auf ein Steinpflaster; und mit derselben Armbrust schiesse man gegen dasselbe Gestein aus 1 oder 2 Ellen Höhe und beobachte alsdann, welcher von beiden Stäben stärker gewirkt habe. Wenn nämlich der aus der Höhe kommende Stab schwächer gewirkt hat als der andere, so hat sicherlich die Luft ihn gehemmt und die Geschwindigkeit vermindert, die vom Feuer ihm anfänglich ertheilt war; eine

solche Geschwindigkeit anzunehmen hindert die Luft ihn, und er würde sie nie erlangen, von welcher Höhe man ihn auch fallen liesse; wenn die vom Feuer ertheilte Geschwindigkeit nicht jene überträfe, die beim natürlichen Falle erlangt würde, so müsste der Aufprall unten eher stärker sein. Solchen Versuch habe ich nicht angestellt, aber ich bin geneigt, anzunehmen, dass eine Kugel, von einer Armbrust oder Kanone, aus noch so grosser Höhe abgeschossen, niemals den Stoss ausüben wird, der aus einer Entfernung von wenigen Ellen gegen eine Mauer ausgeübt wird, d. h. aus so geringer Entfernung, dass das kurzdauernde Losreissen oder Zertheilen der Luft nicht hinreicht, die übernatürliche Wucht, die das Feuer erzeugt hat, aufzuheben. Dieser übermässige Impuls solcher Kraftgeschosse kann die Wurflinie ändern; der Anfang der Parabel wird weniger geneigt sein, das Ende stärker gekrümmt. Dieses alles aber hat keine Bedeutung bei unserem Autor und dessen praktischen Versuchen; bei letzteren ist das Wesentliche eine Tafel für die Geschosse, genannt Flugbahn oder Wurfapparat (Volata), auf welcher die Fallhöhen der Körper bei verschiedenen Neigungswinkeln verzeichnet sind. Da der Stoss mit einem Mörser ausgeführt wird, so ist er nicht sehr stark und übernatürliche Impulse kommen nicht vor, sodass die Geschosse ihre Bahnen recht genau verzeichnen.

Nun können wir zur Abhandlung zurückkehren. Der Autor wird uns einführen in die Behandlung und Untersuchung der Bahnen bei zusammengesetzten Bewegungen. Zunächst handelt er von zwei gleichförmigen Bewegungen, deren eine horizontal, während die andere vertical gerichtet ist.

Theorem II. Propos. II.

»Wenn ein Körper nach zwei Richtungen gleichförmig bewegt wird, und zwar nach einer horizontalen und einer verticalen, so ist die aus beiden zusammengesetzte Bewegung 'in der Potenz' (potentia) gleich jenen beiden Momenten.«

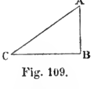


Fig. 109.

Ein Körper werde also nach zwei Richtungen bewegt; der senkrechten entspreche die Strecke AB (Fig. 109), der horizontalen, in derselben Zeit, die Strecke BC. Da nun in gleichen Zeiten bei gleichförmiger Bewegung die Strecken AB, BC zurückgelegt werden, so verhalten sich

auch die Bewegungsmomente wie AB, BC. Der Körper wird die Diagonale AC beschreiben und sein Geschwindigkeitsmoment wird AC sein. Aber AC ist »in der Potenz« gleich AB, BC, mithin ist das aus beiden zusammengesetzte Moment nun »in der Potenz« gleich jenen beiden, wenn man sie als gleichzeitig erfasst.

Simpl. Ich bitte mir ein Bedenken zu benehmen; der soeben behauptete Satz scheint einem solchen der vorigen Abhandlung zu widersprechen; dort wurde gesagt, die von A bis B erzeugte Geschwindigkeit sei gleich der von A bis C hervorgerufenen, jetzt heisst es, die Geschwindigkeit in C sei grösser, als die in B.

Salv. Die Sätze, Herr *Simplicio*, sind alle beide richtig, aber ganz verschieden von einander. Hier handelt es sich um einen einzigen Körper, der nur eine Bewegung ausführen kann, die aber aus zweien zusammengesetzt ist, die beide gleichförmig sind; dort ist die Rede von zwei Körpern, deren jeder gleichförmig beschleunigt fällt, der eine längs der Senkrechten AB, der andere längs der Geneigten AC. In diesem letzteren Falle sind die Zeiten nicht gleich, da die Fallzeit für AC grösser ist, als die für AB; aber gegenwärtig sind die Bewegungen längs AB, BC, AC gleichförmig und gleichzeitig.

Simpl. Verzeiht die Unterbrechung, ich bin beruhigt; fahren wir fort.

Salv. Im Folgenden untersucht der Autor die Geschwindigkeit eines Körpers, der zwei Bewegungen ausführt, eine gleichförmige horizontal, und eine gleichförmig beschleunigte vertical, aus welchen die Bahn zusammengesetzt wird, und er beschreibt die parabolische Linie; in jedem Punkte derselben versucht er die Geschwindigkeit zu bestimmen; zu diesem Zwecke zeigt der Autor uns den Weg oder die Methode, solche Geschwindigkeiten mittelst der Bahnlinie zu messen, auf welcher der Körper bei gleichförmiger Beschleunigung senkrecht hinabfällt.

Theorem III. Propos. III.

»Die Bewegung geschehe längs AB (Fig. 110) von A aus. Man nehme irgend einen Punkt C in der Senkrechten an, und es sei AC die Zeit oder das Maass der Zeit für den Fall längs AC, zugleich auch das Maass der Geschwindigkeit im Punkte C, die der Körper beim Falle durch AC erlangt hat. Man nehme ferner in derselben Geraden einen anderen Punkt B, in welchem die Geschwindigkeit ermittelt werden soll in ihrem Ver-

hältniss zum Werthe in C, wofür AC das Maass sein sollte. Man mache AS gleich der mittleren Proportionale zu BA, AC. Wir werden zeigen, dass die Geschwindigkeiten in B und C sich verhalten wie die Linien SA und AC. Man ziehe die Horizontale CD gleich $2AC$ und BE gleich $2AB$. Aus früherem ist bekannt, dass, wenn ein Körper durch AC fällt und alsdann in die Horizontale CD abgelenkt sich fortbewegt, er in dieser letzteren mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Strecke CD in derselben Zeit durchläuft wie AC; ähnlich wird BE in derselben Zeit durcheilt, wie AB.

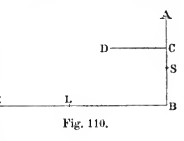


Fig. 110.

Aber die Fallzeit für AB ist gleich AS; folglich wird auch BE in derselben Zeit AS durchmessen. Es verhalte sich nun EB zu BL, wie die Zeit SA zur Zeit AC. Da die Bewegung längs EB gleichförmig ist, so wird die Strecke BL mit dem Geschwindigkeitswerthe in B in der Zeit AC zurückgelegt. Aber in eben dieser Zeit AC wird die Strecke CD durchlaufen mit dem Geschwindigkeitswerthe in C. Die Geschwindigkeitswerthe aber verhalten sich wie die Strecken, die in gleichen Zeiten zurückgelegt werden; mithin verhalten sich die Geschwindigkeiten in C und B wie DC zu BL. Da nun DC zu BE wie ihre Hälften, d. h. wie CA zu AB, und da EB zu BL wie BA zu AS, so verhält sich CD zu BL wie CA zu AS; d. h. wie die Geschwindigkeit in C zu der in B, so verhält sich CA zu AS oder so verhält sich die Fallzeit für CA zu der für AB. Daraus erhellt die Methode, die Geschwindigkeiten zu messen auf einer Linie des senkrechten Falles; hierbei ist angenommen, die Geschwindigkeiten wüchsen proportional der Zeit.

Ehe wir fortfahren, ist zu erwähnen, dass, da von der aus gleichförmiger horizontaler und beschleunigter verticaler zusammengesetzten Bewegung gesprochen werden soll (denn aus diesen setzt sich die Bahnlinie, die Parabel zusammen), wir ein allgemeines Maass festsetzen müssen, mit dem alle Geschwindigkeiten, Impulse oder Momente ausgemessen werden sollen. Da es für gleichförmige Bewegung unzählig viele Geschwindigkeitswerthe giebt, von welchen nicht beliebige zufällige, sondern einer von den unzähligen mit den durch gleichförmige

Beschleunigung erlangten combinirt und auf einander bezogen werden sollen, so konnte ich keinen einfacheren Weg ersinnen als den, eine andere Grösse von gleicher Art anzunehmen. Um deutlicher mich auszudrücken, sei die Gerade AC (Fig. 111) senkrecht zu CB; AC sei die Höhe, CB die Weite (amplitudo) der Halbparabel AB, die durch Zusammensetzung zweier Bewegungen entsteht, deren eine in dem senkrechten Fall, von A aus, durch AC, besteht, während die andere die gleichförmige Transversalbewegung längs der Horizontalen AD ist. Die in C längs AC erlangte Geschwindigkeit wird durch die Länge von AC gemessen, denn bei gleicher Höhe wird stets ein und dieselbe Geschwindigkeit erzeugt; in der Horizontalen dagegen können unzählig viele Geschwindigkeitswerthe angenommen werden; um aus allen diesen denjenigen, den ich wähle, zu bezeichnen und wie mit dem Finger auf ihn hinweisen zu können, will ich die Senkrechte CA nach oben verlängern und mit der Verlängerung AE andeuten, dass der Körper, von E aus fallend, in A diejenige Geschwindigkeit erlangt hat, mit welcher er sich längs der Horizontalen AD fortbewegen soll; dieser Geschwindigkeitswerth ist ein solcher, dass in der Zeit eines Falles längs EA in der Horizontalen eine Strecke gleich $2\,EA$ durchlaufen würde. Solches vorauszuschicken war nothwendig.

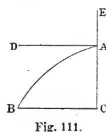


Fig. 111.

Ausserdem merke man, dass die Horizontale CB die Amplitude der Parabel genannt werden soll. Die Höhe AC derselben Parabel heisst ihre Axe.

Die Linie EA, durch deren Durchmessung beim Fall die horizontale Geschwindigkeit bestimmt wird, nenne ich die »Sublimität« (sublimitas).[36]

Nach diesen Erörterungen und Festsetzungen wende ich mich zu den Beweisen.

Sagr. Haltet ein, ich bitte, denn ich glaube, hier ist es am Platz, darauf hinzuweisen, wie schön der Gedanke des Autors übereinstimmt mit der Methode des *Plato*, die gleichförmigen Bewegungen beim Umlauf der himmlischen Körper zu bestimmen; er hatte von ungefähr erkannt, dass ein Körper von der Ruhe bis zu einer gewissen Geschwindigkeit, in welcher er beharren sollte, nicht gelangen könne, ohne alle die geringeren Geschwindigkeitswerthe vorher anzunehmen, er meinte, Gott

habe nach der Schöpfung der himmlischen Körper, um ihnen diejenigen Geschwindigkeiten zu ertheilen, mit welchen sie gleichförmig in kreisförmigen Bahnen sich ewig fortbewegen sollten, von der Ruhe aus durch gewisse Strecken natürlich beschleunigt, sie geradlinig fortschreiten lassen, ähnlich wie wir die Körper von der Ruhe aus sich beschleunigt fortbewegen sehen. Er fügt noch hinzu, dass, nachdem der ihm wohlgefällige Geschwindigkeitswerth erlangt war, er die geradlinige in eine kreisförmige Bewegung umwandelte; diese allein sei geeignet. gleichförmig fortzubestehen, da die Umläufe statthaben ohne Entfernung oder Annäherung an ein gewisses Ende oder Ziel. Dieser Einfall ist des *Plato* würdig; und er ist um so höher zu schätzen, als beim Anblick des wirklichen Vorganges der wahre Grund, den er nicht berührt, der aber von unserem Autor aufgedeckt und in seiner wahren Gestalt mit Wegräumung alles poetischen Scheines dargestellt wird, verhüllt erscheint. Auch glaube ich, dass auf Grund der recht genauen Kenntniss der Grösse der Bahnen der Planeten, ihrer Entfernungen vom Centrum, um welches sie sich herumbewegen, sowie ihrer Geschwindigkeiten unser Autor (dem *Plato*'s Gedanke nicht unbekannt gewesen sein dürfte) recht oft versucht haben wird, eine Höhe (sublimita) zu bestimmen, von der, aus der Ruhelage, die Planeten in gewissen Strecken geradlinig und gleichförmig beschleunigt sich bewegen müssten, um alsdann, umgewandelt in gleichförmige Bewegung, die bestimmten Bahngrössen und Umlaufszeiten zu erhalten.

Salv. Ich erinnere mich des wohl, dass er mir mittheilte, er habe einmal eine Schätzung versucht und dabei gute Uebereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden; aber er hat davon nicht weiter sprechen wollen, um bei den zahlreichen neuen Gesichtspunkten, die er aufdeckt und die vielfach Missachtung erfahren haben, nicht wiederum Funken anzufachen. Wer aber einen derartigen Wunsch hegt, kann auf Grund der Lehren der vorliegenden Abhandlung sich selbst Genüge schaffen. Kommen wir nun auf unseren Gegenstand zurück.

Probl. I. Propos. IV.

In den einzelnen Punkten einer gegebenen Wurfparabel die Geschwindigkeiten zu bestimmen.

Es sei BEC (Fig. 112) die Halbparabel, deren Amplitude CD, Höhe DB, welch letztere nach oben verlängert der Parabeltangente CA in A begegne, und es werde durch den

Scheitel B die Gerade BJ parallel dem Horizonte und CD gezogen. Wenn die Amplitude CD gleich ist der Gesammthöhe DA, so wird auch BJ gleich BA und gleich BD sein. Wenn ferner die Fallzeit für AB, von A aus, und auch die in B erlangte Geschwindigkeit mit AB bemessen wird, so wird DC (welches gleich $2\,BJ$ ist) die Strecke sein, die durch den längs AB ertheilten Impuls nach Ablenkung in die Horizontale, in gleicher Zeit in dieser letzteren durchlaufen wird. Aber in eben dieser Zeit wird BD, von B aus, zurückgelegt, folglich wird der von A aus durch AB gefallene Körper in gleicher Zeit in der Horizontalen eine Strecke gleich DC durcheilen. Hierzu gesellt sich die durch freien Fall zurückgelegte Höhe BD, und es wird die Parabel BC beschrieben. Im Endpunkte C ist die Bewegung zusammengesetzt aus dem gleichförmigen transversalen Momente AB und aus dem beim Fall durch BD in D oder C erzeugten, welche beide Momente einander gleich sind. Wenn nun AB das Maass des einen, nämlich des gleichförmig transversalen ist, so wird BJ, welches gleich BD ist, das Maass des anderen in D oder C erlangten sein. Mithin ist die Gerade JA die Grösse des aus beiden zusammengesetzten Momentes: folglich wird diese auch das Maass der ganzen Geschwindigkeit sein, die der geworfene Körper in C erlangt nach der Bewegung durch BC. Nimmt man nun in der Parabel einen beliebigen Punkt E an, so wird zur Bestimmung der Geschwindigkeit eine Horizontale EF gezogen und BG als mittlere Proportionale zu BD, BF construirt. Da AB oder BD Fallzeit und Geschwindigkeitsmaass sind für BD von B aus, so wird BG Fallzeit und Geschwindigkeit für BF, von B aus, sein. Macht man nun BO gleich BG, so wird die Verbindungslinie und Diagonale AO die Geschwindigkeit im Punkte E sein, denn AB ist als bestimmendes Zeitmaass angenommen, und die Geschwindigkeit in B wird nach der Ablenkung in die Horizontale sich weiterhin gleich bleiben; BO dagegen misst die Geschwindigkeit in F oder E, von B aus, nach dem Falle längs BF. AB und BO werden aber durch AO dargestellt, was verlangt war.

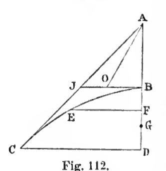


Fig. 112.

Sagr. Die Zusammensetzung verschiedener Impulse und

ihrer Werthe, und die Betrachtung des Resultates dieser Vereinigung ist mir derart neu, dass ich in nicht geringem Grade verwirrt bin. Ich rede nicht von der Znsammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen, selbst wenn sie von einander verschieden sind, da ich aus beiden stets eine Resultirende construiren kann; mich verwirrt nur die Zusammensetzung einer gleichförmigen horizontalen und einer beschleunigten senkrechten Bewegung. Daher bitte ich, die Frage etwas gründlicher zu behandeln.

Simpl. Ich bedarf dessen meinerseits um so mehr, als ich noch nicht ganz in dem Grade überzeugt bin, wie solches zur Begründung alles Uebrigen, zur Erkenntniss fundamentaler Sätze nöthig erscheint. Ja ich will bekennen, dass selbst bei der Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen, einer horizontalen und einer verticalen, ich jene Resultante besser verstehen möchte. Herr *Salviati* wird unsere Bedenken jetzt würdigen.

Salv. Euere Bedenken sind verständig, und da ich längere Zeit über dieselben nachgedacht habe, will ich versuchen, Euch dem Verständniss näher zn führen. Indess müsst Ihr gestatten, dass ich dabei auf die bisher behandelten Fragen mehrfach zurückkomme.

Ob nun die Geschwindigkeiten gleichförmige oder dnrch Beschleunigung entstandene seien, wir müssen stets znnächst ein Maass festsetzen, nach welchem sowohl jene Geschwindigkeiten, wie die Zeiten ausgedrückt werden. In Betreff des Zeitmaasses sind bekanntlich Stunden, Minuten und Secunden angenommen worden.[36] Ebenso wie für die Zeit müssen wir für die Geschwindigkeiten ein allgemein verständliches und angenommenes Maass haben, d. h. es muss fast überall dasselbe sein. Zu solchem Zweck hat der Autor die Beschleunignng freifallender Körper zu Grunde gelegt, weil überall auf der Erde die Geschwindigkeiten in gleicher Weise wachsen. Welche Geschwindigkeit z. B. ein einpfündiger Bleistab bei senkrechtem Falle aus gewisser Höhe von der Ruhe aus erlangt, ebendenselben Werth wird man stets nnd überall erhalten, daher ist diese Erscheinung sehr geeignet, die Grösse des Impulses beim Fall darznstellen. Es erübrigt alsdann noch, eine Methode zu ersinnen, um auch die gleichförmige Geschwindigkeit so auszudrücken, dass ein jeder Andere sich denselben Werth vorstellen kann; so dass nicht etwa der Eine einen grösseren, der Andere einen kleineren sich denke, und dass auch bei der Zusammensetzung der

gleichförmigen und beschleunigten Bewegung von verschiedenen Personen dieselben Impulse vorgestellt werden. Zu diesem Zwecke ersann unser Autor das geeignetste Mittel, indem er auf die natürlich beschleunigte Bewegung zurückging, durch welche jedwedes Moment erzeugt werden kann, welches, wenn die Bewegung in geeigneter Weise umgewandelt wird, den Werth beibehält, so zwar, dass in gleicher Zeit, wie der Fall durch eine gegebene Strecke, der doppelte Weg zurückgelegt wird. Da dieses der Hauptpunkt in der behandelten Frage ist, so wird es nützlich sein, ein bestimmtes Beispiel zu erläutern. Wenn wir uns die Geschwindigkeit durch den Fallraum von einer Elle darstellen, und nun andere Geschwindigkeiten oder Widerstände ausdrücken wollen, und wenn z. B. die Fallzeit vier Secunden betragen hatte, so dürfen wir nicht, um die Geschwindigkeit bei grösserer oder kleinerer Fallhöhe anzugeben, das Verhältniss dieser letzteren Strecke zum Fall durch eine Elle als Maass des Impulses im zweiten Falle ansehen, in der Meinung, dass z. B. bei vierfacher Fallhöhe die vierfache Geschwindigkeit erzeugt sei; denn dieses wäre falsch. Es wächst ja die Geschwindigkeit nicht proportional der Fallstrecke bei beschleunigter Bewegung, sondern proportional der Fallzeit, und proportional dem Quadrate der letzteren wachsen die Fallstrecken, wie schon erwiesen ward. Wenn wir andererseits in einer geraden Linie eine gewisse Strecke als Maass der Geschwindigkeit angenommen hätten, und ebenso als Maass der Zeit und des in derselben durchlaufenen Weges (welche drei Grössen häufig der Einfachheit wegen durch ein und dieselbe Grösse dargestellt werden), so würden wir, um Zeit und Geschwindigkeit zu bestimmen, die derselbe Körper bei anderer Strecke erlangt hätte, nicht unmittelbar diese letztere als Maass ansehen, sondern die mittlere Proportionale aus den beiden Strecken. Nehmen wir ein Beispiel vor. In der Senkrechten AC (Fig. 113) falle ein Körper natürlich beschleunigt längs AB: die Fallzeit können wir durch irgendwelche Strecke darstellen; der Kürze wegen wählen wir AB selbst; ebenso drücke ich die erlangte Geschwindigkeit durch dasselbe AB aus, sodass für alle zu betrachtenden Weglängen AB das Maass sei. Halten wir fest, dass nach unserer willkürlichen Annahme die eine Linie AB drei ganz verschieden geartete Grössen misst, nämlich Strecken, Zeiten und Impulse, und soll nun bestimmt werden die Fallzeit von A bis C für die bestimmte

A
B
D
C

Fig. 113.

Fallstrecke AC im Verhältniss zu der Fallzeit und zum Impulse längs AB, so wird beides gefunden, indem man AD als mittlere Proportionale zu AC, AB bildet; d. h. es würden die Fallzeiten durch AC und AB sich verhalten, wie die Linien AD, AB und die in C und B erlangten Impulse werden sich ebenso wie AD zu AB verhalten, da die Geschwindigkeiten in demselben Verhältniss zunehmen, wie die Fallzeiten, eine Behauptung, die dem dritten Theorem zu Grunde gelegt ward.

Was nun die Zusammensetzung betrifft, so hatten wir zuerst eine horizontale und eine senkrechte gleichförmige Bewegung, alsdann eine horizontal gleichförmige und eine vertical beschleunigte. Wenn beide gleichförmig sind, so kommt die Bewegung in der Diagonale zu Stande; wenn z. B. der Körper längs der Senkrechten AB (Fig. 109) 3 Geschwindigkeitsgrade besässe, dagegen senkrecht von B nach C hin 4 Grade, so wird bei der Zusammensetzung der Körper von A nach C gelangen längs der Diagonale AC, die nicht etwa gleich 7, d. h. der Summe von 3 und 4 ist, sondern gleich 5, welches »in der Potenz« gleich 3 und 4 ist; denn bildet man die Quadrate von 3 und von 4, welche 9 und 16 betragen, so geben diese 25 als Quadrat von AC, welches gleich ist den Quadraten von AB und BC zusammen, und AC ist so gross wie die Seite eines Quadrates von 25, also die Wurzel daraus, mithin 5. Man halte also als sichere Regel fest, dass bei der Zusammensetzung einer horizontalen und einer verticalen Bewegung, die beide gleichförmig sind, man aus beiden zwei Quadrate zu bilden und dieselben zu summiren, danach aber die Wurzel auszuziehen hat, welche den Werth der zusammengesetzten Bewegung ausdrückt. Wie in unserem Beispiel würde ein Körper, der mit 3 Grad senkrecht und mit 4 Grad horizontal gestossen würde, von beiden Stössen zugleich getroffen sich bewegen, als habe er einen Stoss von 5 Grad erhalten. Und diesen selben Werth hätte der Körper an allen Punkten der Diagonale AC, solange die Impulse weder wachsen noch abnehmen.

Bei Zusammensetzung einer horizontal gleichförmigen und einer vertical beschleunigten Bewegung, wird die Diagonale, oder die durch beide Bewegungen entstandene Bahn keine gerade Linie sein, sondern eine Halbparabel, wie bewiesen war; denn der Impuls wächst beständig, dank der senkrechten Beschleunigung. Um die Geschwindigkeit in dieser parabolischen Diagonale zu bestimmen, muss zuerst der Werth der gleichförmig horizontalen ermittelt werden, und dann der Impuls des

Körpers im bezeichneten Punkte: solches kann nicht geschehen ohne Kenntniss der Fallzeit vor der Zusammensetzung der beiden Bewegungen; eine solche Beachtung der Zeit war bei der Behandlung zweier gleichförmiger Bewegungen nicht nöthig: hier dagegen, wo die eine Geschwindigkeit vom äussersten Grade von Langsamkeit an beständig proportional der Zeit anwächst, hier muss die Zeit den Grad erlangter Geschwindigkeit anzeigen: schliesslich ist alsdann »in der Potenz« die wahre Geschwindigkeit gleich der der beiden Componenten. Auch hier nehmen wir lieber ein bestimmtes Beispiel: Senkrecht zum Horizonte, in *AC* (Fig. 114) sei die Fallstrecke *AB* angenommen, und *AB* sei zugleich die Fallzeit von *A* bis *B*, sowie endlich auch das Maass für den in *B* erlangten Impuls. Zunächst ist klar, dass, wenn nach dem Fall durch *AB* der Körper nach *BD* horizontal abgelenkt wird, er in gleicher Zeit *AB* eine Streeke gleich $2AB$ durchlaufen würde; so lang mache man *BD*. Ferner schneide man *BC* gleich *BA* ab, ziehe die Gerade *CE* parallel und gleich *BD*, und construire darauf durch die Punkte *BE* die Parabel *BEJ*.

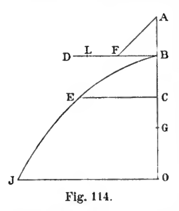


Fig. 114.

Da nun in der Zeit *AB* mit der Geschwindigkeit *AB* die Horizontale *BD* oder *CE*, gleich $2AB$, und in derselben Zeit die Senkrechte *BC* durchlaufen und in *C* ein Impuls erzeugt wird, der gleich ist dem horizontalen, so wird der Körper in der Zeit *AB* durch die Parabel von *B* nach *E* gelangt sein mit einem Impulse, der aus jenen beiden, deren jeder gleich *AB* ist, zusammengesetzt ist. Da der eine horizontal, der andere vertical ist, so wird die Diagonale »in der Potenz« jenen beiden gleich sein, mithin (»in der Potenz«) gleich dem Doppelten einer jeden von ihnen.[37]) Es sei nun *BF* gleich *BA*; ferner ziehe man die Diagonale *AF*; der Impuls in *E* wird grösser sein als der in *B*, nach dem Fall durch *AB*, d. h. als die Geschwindigkeit *BD* im Verhältniss von *AF* zu *AB*. Wenn aber stets *BA* für die Strecke *AB* Strecke, Zeit und Impuls misst, so ist die Strecke *BO* nicht gleich, sondern grösser als *AB*; man mache *BG* als mittlere Proportionale zu *AB*, *BO*, alsdann wird *BG* Zeit und Geschwindigkeit in *O*, nach

dem Falle durch BO, angeben; die horizontale Strecke mit dem Impulse AB nach der Fallzeit AB wäre gleich $2AB$, nnd sie wird nach der ganzen Zeit BG nm so viel grösser sein, als BG grösser ist als BA. Macht man nun LB gleich BG und zieht die Diagonale AL, so haben wir den zusammengesetzten Impuls aus den beiden, deren einer gleichförmig horizontal längs AB, der andere in O, oder in J durch senkrechten Fall durch BO in der Zeit BG erlangt wnrde, während auch das Moment gleich BG war. Aehnlich findet man den Impnls am äussersten Ende der Parabel, wenn die Höhe der letzteren kleiner als die Sublimität AB wäre, indem stets zu beiden die mittlere Proportionale construirt würde; diese letztere wäre, statt BF, horizontal aufzutragen, und dann wiedernm eine Diagonale AF zu ziehen, um den Impuls am Ende der Parabel zu erhalten.

Zu der bisher betrachteten Methode, die Impulse, Stösse oder Erschütterungen zu betrachten, müssen wir eine andere bemerkenswerthe Betrachtung anschliessen, sofern nämlich, um die Kraft eines Geschosses und seine Energie (energia) zu bestimmen, es nicht genügt, seine Geschwindigkeit zu beachten, es muss ausserdem der Zustand des Getroffenen nnd die Bedingungen, unter welchen der Stoss erfolgt, berücksichtigt werden; in mehrfacher Hinsicht ist solches für die Wirksamkeit von grossem Interesse. Jedermann sieht ein, dass der gestossene Körper so viel vom Stossenden beeinflusst wird, als er dem Stoss sich widersetzt und demselben entgegenwirkt, ihn ganz oder theilweise aufhebend, nnd zwar: es wird der Schlag, wenn er einen Gegenstand trifft, der ohne Widerstand der Geschwindigkeit des Stossenden weicht, nichts hervorrufen. Wer da läuft, um mit seiner Lanze den Feind zu treffen, und einen mit gleicher Geschwindigkeit Fliehenden erreicht, der wird ihn nicht verwunden, sondern ohne Verletzung ihn nur berühren.

Wenn aber der Stoss einen Gegenstand trifft, der nicht dem Stossenden ganz und gar weicht, sondern nur zum Theil, so wird der Stoss Schaden zufügen, aber nicht mit seinem vollen Impnlse, sondern nur mit dem Ueberschuss der Geschwindigkeiten des stossenden und des gestossenen Körpers: so dass, wenn der stossende Körper mit 10 Grad Geschwindigkeit den anderen trifft, welch letzterer mit 4 Grad answeicht, der Stoss 6 Grad betragen wird.

Endlich aber wird der Stoss ein vollkommener und allergrösster sein, in Hinsicht auf den stossenden Körper, wenn der gestossene gar nicht ausweicht, sondern vollständig widersteht

und die Gesammtbewegung jenes anfhebt, wenn solches überhaupt vorkommen kann. Ich sagte in Hinsicht auf den stossenden Körper, weil, wenn der Stoss in entgegengesetzter Richtung den letzteren träfe, der Schlag und die Begegnung um so viel heftiger wären, als die beiden entgegengesetzten Geschwindigkeiten vereinigt grösser sind, als die des stossenden allein. Ausserdem muss beachtet werden, dass das stärkere oder schwächere Answeichen nicht nur von der geringeren oder grösseren Härte der Materie abhängen wird. je nachdem Eisen, Blei oder Wolle etc. getroffen wird, sondern auch von der Lage des Körpers, der den Stoss empfängt; wird er senkrecht getroffen, so wirkt der Stoss am kräftigsten; beim schiefen Stoss wird der Schlag schwächer sein, und das zwar um so mehr, je grösser die Neigung, denn bei solcher Lage des Körpers, mag derselbe noch so hart sein, kann nie der ganze Stoss wirken. Der stossende Körper läuft weiter, indem er wenigstens zum Theil seine Bewegung über die Oberfläche des gestossenen fortsetzt. Wenn also oben von der Impulsgrösse am Ende der Parabel geredet wurde, so mnss stets der senkrecht wirkende Stoss gedacht werden, also senkrecht zur Wurflinie oder zu deren Tangente am betrachteten Punkte: denn wenn dieser Impuls oder diese Bewegung aus einer horizontalen und einer senkrechten zusammengesetzt ist, so wird der Stoss doch weder gegen eine verticale, noch gegen eine horizontale Ebene ihre maximale Wirkung ausüben, da gegen beide ein schiefer Stoss erhalten würde.

Sagr. Das Nachdenken über diese Stösse erinnert mich an ein Problem, oder besser an eine Frage der Mechanik, deren Beantwortung ich bei keinem Schriftsteller gefnnden habe, ja nicht einmal eine Andeutung, die mich, wenn auch nur znm Theil, befriedigte. Mein Erstaunen bezieht sich darauf, woher die Energie und die ungeheuere Kraft stammen und wovon sie abhängen könne, die man beim Stosse auftreten sieht, wenn mit einem einfachen Hammerschlage von nur 8 oder 10 Pfund Gewicht wir solche Widerstände überwinden, die keinem ohne Stoss wirkenden und blos drückenden Gewicht nachgeben würden, wenn letzteres auch viele hundert Pfund schwer wäre. Ich würde gern ein Mittel kennen, solche Stosskraft zu messen, da ich sie nicht für unendlich gross halte, sondern für eine solche, die einen bestimmten Werth hat, der sehr wohl mit anderen Druck-, Hebel-, Schrauben- oder anderen Kräften verglichen nnd gemessen werden darf, da letztere nach Belieben vergrössert werden können.

Salv. Sie, mein Herr, sind es nicht allein, der diese Wirkung bewundert und über die Ursache einer solch erstaunlichen Erscheinung im Unklaren sich befindet. Ich habe einige Zeit darüber nachgedacht, meine Verwirrung aber nahm zu, bis ich endlich, bei einer Begegnung mit unserem Akademiker, doppelt getröstet ward: erstlich erfuhr ich, dass auch er lange Zeit dieselbe Dunkelheit empfunden hatte, dann aber sagte er mir, dass er nach einem Opfer von vielen Tausend Stunden seines Lebens durch Nachsinnen und Forschen Einiges erkannt habe, was weit sich von unseren unmittelbaren Vorstellungen entfernt, und was er fand, war neu und wegen der Neuheit merkwürdig. Da ich nunmehr weiss, dass Sie, mein Herr, gern diese Gedanken, die weit von herrschenden Ansichten abliegen, kennen lernen würden, werde ich Eurem Anliegen jetzt zwar nicht nachkommen, aber ich verspreche Euch, nachdem wir die vorliegende Abhandlung beendet haben werden, alle jene Gedankenflüge, oder sagen wir jene Wunderlichkeiten, zu erklären, so weit ich sie aus den Unterredungen mit dem Akademiker im Gedächtniss behalten habe. Einstweilen aber folgen wir unserem Autor.

Probl. II. Propos. V.

»In der verlängerten Axe einer gegebenen Parabel den höchsten Punkt zu bestimmen, von dem aus ein fallender Körper diese Parabel beschreibt.«

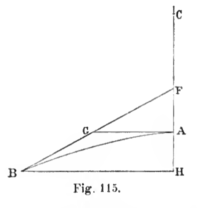


Fig. 115.

Die Parabel AB (Fig. 115) sei gegeben mit der Amplitude HB. Auf der verlängerten Axe HC soll die »Sublimität« bestimmt

werden, d. h. der Punkt, von dem aus ein Körper bis A fallend und in die Horizontale abgelenkt mit einer solchen Geschwindigkeit sich bewegen muss, dass er die Parabel AB beschreibt. Man ziehe die Horizontale AG parallel BH, mache AF gleich AH, ziehe die Gerade FB, welche die Parabel in B berühren und die Horizontale AG in G schneiden wird. Man construire zu FA, AG die dritte Proportionale AC.

$$(FA : AG = AG : AC)$$

Ich behaupte, C sei der geforderte Punkt, von dem aus ein Körper fallen und mit dem in A erlangten Impulse horizontal sich fortbewegen muss, um, wenn die verticale Bewegung, von A an nach H, hinzukommt, die Parabel AB zu durchlaufen. Denn wenn CA die Fallzeit für CA und zugleich die in A erlangte Geschwindigkeit ist, so wird AG (die mittlere Proportionale zu CA, AF) Fallzeit und Geschwindigkeit für FA, von F aus, oder von A bis H, sein. Da nun mit horizontaler Geschwindigkeit eine Strecke gleich $2\,CA$ zurückgelegt wird und der Körper in gleicher Zeit AG die Strecke $2\,GA$ durchläuft, welches gleich BH ist (da bei gleichförmiger Bewegung die Strecken den Zeiten proportional sind), und da in der verticalen Richtung in derselben Zeit AG die Strecke AH durchmessen wird, so muss der Körper in ebenderselben Zeit die Amplitude HB und die Höhe AH durchlaufen. Mithin wird die Parabel von der »Sublimität« C aus beschrieben, was gefordert war.[39])

Zusatz.

Hieraus folgt, dass die halbe Basis oder die halbe Amplitude der Halbparabel (welche gleich ist dem vierten Theile der Amplitude der ganzen Parabel), die mittlere Proportionale sei zur Höhe und zur Sublimität.[40])

Probl. III. Propos. VI.

»Wenn Sublimität und Höhe einer Halbparabel gegeben sind, so soll ihre Amplitude gefunden werden.«

Zur Horizontalen DC (Fig. 116) sei die Gerade AC senkrecht; die Höhe CB sei gegeben, sowie die Sublimität BA. Es soll in der Horizontalen CD die Amplitude derjenigen Halbparabel bestimmt werden, die von der Sublimität BA, bei der Höhe BC, beschrieben wird. Man construire die mittlere

Proportionale zu CB, BA, und nehme doppelt so gross CD an. Ich behaupte, CD sei die geforderte Amplitude. Der Beweis folgt aus dem Vorhergehenden.

Fig. 116.

Theorem IV. Propos. VII.

»Von Körpern, die Halbparabeln gleicher Amplitude beschreiben, wird derjenige, der eine Parabel durchläuft, deren Amplitude gleich der doppelten Höhe ist, einen geringeren Impuls haben, als irgend ein anderer der genannten Körper.«

Bei der Halbparabel BD (Fig. 117) sei die Amplitude CD das Doppelte der Höhe CB, und man mache auf der nach oben verlängerten Axe BA gleich der Höhe BC: man ziehe AD, welches die Parabel in D berühren und die Horizontale BE in E schneiden wird, alsdann wird BE gleich BC oder gleich

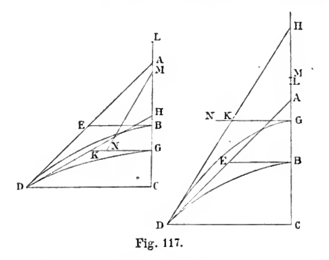


Fig. 117.

BA sein. Nun ist bekannt, dass die Parabel von einem Körper durchlaufen wird, dessen gleichförmig horizontale Bewegung aus dem Fall durch AB hervorgerufen ist, während er beschleunigt in C, von B aus, anlangt. Daher wird der zusammengesetzte Impuls in D gleich der Diagonale AE sein, »in der Potenz« gleich jenen beiden. Es sei nun GD irgend eine andere

Halbparabel mit derselben Amplitude CD, aber mit der Höhe CG, welche kleiner oder grösser sei als BC; dieselbe werde von HD berührt, welche die durch G gezogene Horizontale in K schneide; und wie HG zu GK, so verhalte sich KG zu GL. Nach dem Vorhergehenden wird von der Höhe GL aus die Halbparabel GD beschrieben. Zu AB, GL sei die mittlere Proportionale GM, alsdann wird GM Zeit und Impuls in G, von L aus, messen (denn AB ist als Maass der Zeit und der Geschwindigkeit angenommen). Es sei ferner zu BC, CG die mittlere Proportionale gleich GN, so ist dieses Fallzeit und Impuls in C, von G aus. Ziehen wir MN, so ist dieses der Impuls für die Halbparabel BD im Punkte D. Ich behaupte, MN sei grösser als AE. Denn GN war die mittlere Proportionale zu BC, CG, und da BC gleich BE oder GK ist (denn beide sind die Hälfte von DC), so ist CG zu GN wie NG zu GK, und wie CG oder HG zu GK, so verhalten sich die Quadrate von NG und GK; wie aber HG zu GK, so ist KG zu GL construirt worden, also verhalten sich die Quadrate von NG und GK wie KG zu GL; aber wie KG zu GL, so verhalten sich die Quadrate von KG und GM (da GM die mittlere Proportionale zu KG, GL), folglich sind die drei Quadrate NG, GK, GM einander folgweise proportional (NG zu GK wie GK zu GM). Das Quadrat aus der Summe der äusseren Glieder, welches gleich dem Quadrate von NM ist, wird grösser als das Doppelte vom Quadrate KG sein, d. h. als das Doppelte vom Quadrat von AE: also ist das Quadrat von MN grösser als das Quadrat von AE, mithin die Linie MN grösser als EA, w. z. b. w.[41])

Zusatz.

»Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass umgekehrt der Impuls in D für den Lauf durch die Halbparabel DB kleiner sei, als der für irgend eine andere von grösserer oder geringerer Höhe als eben die Halbparabel DB, deren Tangente einen halben rechten Winkel bildet mit dem Horizonte. Hieraus folgt, dass, wenn bei verschiedenen Neigungen vom Punkte D aus Körper geworfen werden, man den weitesten Wurf oder die grösste Amplitude der halben oder ganzen Parabel erhalten wird bei einer Neigung von einem halben Rechten. Die bei geringerer oder grösserer Neigung erzielten Weiten werden kleiner ausfallen.«

Sagr. Erstaunlich und entzückend ist die Macht zwingender Beweise, und so sind die mathematischen allein geartet. Ich kannte schon nach Aussage der Bombenwerfer die Thatsache, dass von allen Kanonen- oder Mörserschüssen die unter einem halben Rechten abgeschossene Kugel am weitesten fliege; sie nennen es den sechsten Punkt des Winkelmaasses. Aber das Verständniss des inneren Zusammenhanges wiegt unendlich viel mehr, als die einfache Versicherung Anderer, und selbst mehr als der häufig wiederholte Versuch.

Salv. Ihre Bemerkung ist sehr wahr: die Erkenntniss einer einzigen Thatsache nach ihren Ursachen eröffnet uns das Verständniss anderer Erscheinnngen, ohne Zurückgreifen auf die Erfahrnng; so ist es gerade auch im vorliegenden Falle, wo wir durch Ueberlegung uns die Gewissheit verschafft haben, dass der weiteste Wurf nnter einem halben Rechten erzielt werde; in Folge beweist uns der Autor etwas, was durch das Experiment vielleicht nicht beobachtet worden ist; dass nämlich andere Schüsse gleich weit tragen, wenn die Neigungen gleich viel unter oder über einem halben Rechten betragen: so dass Kugeln, deren eine unter dem 7., die andere unter dem 5. Punkte abgeschossen werden, die gleiche Wurfweite im Horizonte haben, und ebenso die unter 8 und unter Punkt 4, 9 und 3 etc. Hier folgt der Beweis:

Theorem V. Propos. VIII.

»Die Parabelamplituden oder Wurfweiten von Körpern, die bei gleichen Impulsen unter Neigungswinkeln abgesandt werden, die gleich viel vom selben Rechten abweichen, sind einander gleich.«

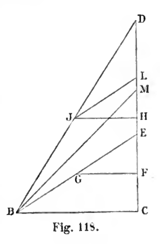


Fig. 118.

Im rechtwinkligen Dreieck MCB (Fig. 118) sei die Horizontale BC gleich der Verticalen CM, so dass der Winkel MBC ein halber Rechter ist; man verlängere CM bis D und trage oberhalb und unterhalb der Diagonale MB bei B zwei einander gleiche Winkel MBE, MBD ab. Es soll bewiesen werden, dass die unter den Winkeln EBC, DBC

mit gleichen Impulsen abgeschossenen Körper Parabeln mit gleichen Amplituden beschreiben. Es ist der Aussenwinkel BMC gleich den inneren MDB, DBM, denen auch MBC gleichkommt. Nehmen wir statt DBM den Winkel MBE, so wird auch MBC den MBE, BDC gleich sein; nach Abzug des gemeinsamen MBE bleibt der Rest BDC gleich dem Reste EBC. Mithin sind DCB und BCE einander ähnlich. Man halbire die Geraden DC und EC in H und in F, ziehe HJ, FG parallel der Horizontalen CB, und construire, wie DH zu HJ, so JH zu HL; alsdann wird das Dreieck JHL dem JHD ähnlich sein, welch letzteres wiederum EGF ähnlich ist. Da nun JH gleich GF (da beide gleich $\frac{1}{2} BC$), so ist FE d. h. FC gleich HL; fügt man beiden FH hinzu, so wird CH gleich FL. Denken wir uns die Halbparabel durch H und B, mit der Höhe HC, und der Sublimität HL, so wird die Amplitude CB sein, welches gleich $2HJ$ ist, während HJ die mittlere Proportionale zu DH oder CH und HL ist; die Halbparabel wird von DB berührt, da CH und HD einander gleich sind. Wird andererseits die Halbparabel durch FB beschrieben mit der Sublimität FL und der Höhe FC, deren mittlere Proportionale FG gleich $\frac{1}{2} CB$ ist, so ist wiederum CB die Amplitude: die Parabel wird von EB berührt, da EF, FC einander gleich sind. Da nun DBC, EBC (die Wurfsteigungen) gleich weit vom halben Rechten abstehen, so ist der Satz bewiesen.[42])

Theorem VI. Propos. IX.

»Die Amplituden zweier Parabeln sind einander gleich, wenn die Höhen und Sublimitäten einander umgekehrt proportional sind.«

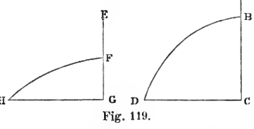


Fig. 119.

Die Höhe der Parabel FH (Fig. 119), nämlich GF, verhalte sich zur Höhe CB der Parabel BD, wie die Sublimität BA der letzteren zur Sublimität FE der ersteren. Ich behaupte, die Amplituden HG, DC seien einander gleich. Da nämlich GF

zu CB wie BA zu FE, so ist das Rechteck aus den äusseren Gliedern GF, FE gleich dem aus den inneren CB, BA; mithin sind die diesen Rechtecken gleichen Quadrate einander gleich; aber dem Rechteck GF, FE ist das Quadrat von $\frac{1}{2}GH$ gleich, und dem Rechteck CB, BA das Quadrat von $\frac{1}{2}CD$, mithin sind sowohl diese Quadrate als ihre Seiten, als auch das Doppelte dieser Seiten einander gleich. Letzteres aber sind die Amplitnden GH, CD, w. z. b. w.[43])

Hülfssatz.

Wird eine gerade Linie irgendwo getheilt, so ist die Summe der Quadrate aus den mittleren Proportionalen zur ganzen Linie und jedem der beiden Theile gleich dem Quadrate der ganzen Linie.

Es sei AD (Fig. 120) in C getheilt. Ich behaupte, die Quadrate der mittleren Proportionalen zu AD und AC sammt der zu AD, CD sei gleich dem Quadrate von AD. Beschreibt man nämlich einen Halbkreis über AD als Durchmesser, errichtet in C eine Senkrechte CB und verbindet B mit A und D, so ist BA die mittlere Proportionale zu DA, AC und DB diejenige zu AD, DC; da nun die Summe der Quadrate von BA, DB gleich ist dem Quadrate von AD (da ABD ein Rechter ist), so folgt der Satz.

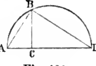


Fig. 120.

Theorem VII. Propos. X.

»Der Impuls in einem Endpunkte einer Halbparabel ist gleich der durch freien senkrechten, längs Sublimität und Höhe beschleunigten Fall erzeugten Geschwindigkeit.«

Es sei AB (Fig. 121) eine Halbparabel mit der Sublimität DA und Höhe AC, die beide zusammen die Senkrechte DC bilden. Ich behaupte, der Impuls in B sei gleich dem eines frei von D bis C fallenden Körpers in C. Es sei DC die Fallzeit und Geschwindigkeit des letzteren. Man mache CF gleich der

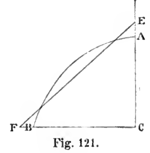


Fig. 121.

mittleren Proportionale zu CD, DA. Es sei ferner CE die mittlere Proportionale zu DC, CA; alsdann ist CF Fallzeit und Geschwindigkeit längs DA von D aus und CE dasselbe für AC von A aus und die Diagonale EF ist das aus jenen zusammengesetzte Moment, mithin das von B in der Halbparabel. Da nun DC in A getheilt ist, und da CF und CE die mittleren Proportionalen sind zu CD, DA sowie CD, AC, so wird die Summe der Quadrate von CF, CE gleich sein dem Quadrate von der ganzen Strecke CD (nach dem vorigen Hülfssatze). Aber diese Summe ist auch gleich dem Quadrate von EF, mithin ist EF gleich DC, folglich sind die Momente in B und in C einander gleich, w. z. b. w.[44])

Zusatz.

Daraus folgt, dass die Impulse aller Halbparabeln mit gleicher Summe von Sublimität und Höhe einander gleich sind.

Probl. II. Propos. XI.

»Bei gegebener Geschwindigkeit und Amplitude einer Halbparabel ihre Höhe zu construiren.«

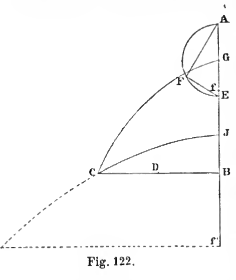


Fig. 122.

Der gegebene Impuls sei durch die Länge der Senkrechten AB (Fig. 122) definirt, die gegebene Amplitude sei BC. Es soll die Sublimität der Halbparabel gefunden werden, deren Impuls bei B gleich AB sei, während ihre Amplitude BC beträgt. Aus Früherem folgt, dass $\frac{1}{2}BC$ die mittlere Proportionale zu Höhe und Sublimität sei ebenderselben Halbparabel, deren Impuls nach dem Vorhergehenden gleich dem eines durch AB von A aus fallenden Körpers sei. Folglich

muss BA so getheilt werden, dass das Rechteck aus seinen Theilen gleich sei dem Quadrate von BD, gleich $\frac{1}{2} BC$. Hieraus folgt, dass BD nicht grösser als $\frac{1}{2} BA$ sein kann, denn das von den Theilen gebildete Rechteck ist, wenn letztere einander gleich sind, am grössten. Man halbire BA in E. Sollte nun BD gleich BE sein, so wäre die Aufgabe gelöst und die Höhe wäre BE, die Sublimität EA (und zugleich erkennt man, dass die Amplitude einer unter einem halben Rechten ansteigenden Parabel die grösste von allen mit gleichen Impulsen erzeugten sei). Es sei aber BD kleiner als $\frac{1}{2} AB$, während AB so abzutheilen ist, dass das Rechteck aus den Abschnitten gleich dem Quadrat von BD sei. Man beschreibe über EA einen Halbkreis, in dem AF gleich BD angesetzt werde, ziehe FE und schneide EG gleich EF ab. Das Rechteck BG, GA mit dem Quadrate von EG zusammen wird gleich sein dem Quadrate von EA, dem auch die Summe der beiden Quadrate von AF, FE gleich sein wird. Nimmt man die Quadrate von GE, FE fort (die beide einander gleich sind), so bleibt das Rechteck BG, GA gleich dem Quadrate von AF oder von BD, und BD ist die mittlere Proportionale zu BG, GA. Hieraus folgt, dass die Höhe einer Halbparabel mit der Amplitude BC und dem Impulse AB gleich BG sei, die Sublimität dagegen GA. Nimmt man niedriger BJ gleich GA, so wird BJ die Höhe, JA aber die Sublimität der Halbparabel JC sein. Dem Beweise gemäss ist Letzteres gestattet.[45])

Probl. III. Propos. XII.

»Es sollen durch Rechnung die Amplituden aller Halbparabeln bestimmt und in eine Tabelle gebracht werden, die bei gleichen Impulsen von geworfenen Körpern beschrieben werden.«

Aus dem Beweise folgt, dass dann von den Körpern Parabeln mit gleichem Impulse beschrieben werden, wenn die Summen von Sublimität und Höhe denselben Werth haben. Alle solche Summen liegen also in einer Senkrechten zwischen denselben Horizontalen. Der Horizontalen CB (Fig. 123) sei die Senkrechte BA gleich und man ziehe die Diagonale AC. Der Winkel ACB ist also ein halber Rechter von 45 Grad. Man halbire die Senkrechte BA in D, so wird DC diejenige Halbparabel sein, welcher die Sublimität AD und die Höhe DB angehört: der Impuls in C aber ist gleich der Endgeschwindigkeit in B nach dem Fall längs AB. Man ziehe AG parallel BC. Für

alle anderen Halbparabeln gleichen Impulses müssen die zusammengesetzten Sublimitäten und Höhen den Raum zwischen AG, BC ausfüllen. Da ferner schon bewiesen ist, dass die Amplituden derjenigen Halbparabeln, die gleich viel über oder unter 45 Grad ansteigen, einander gleich seien, so wird die für grössere Neigungen ausgeführte Rechnung auch für kleinere benutzbar sein. Ausserdem sollen 10 000 Theile angenommen werden für die grösste bei 45 Grad Anstieg beschriebene Parabel, und so gross sei BA und die Amplitude BC angesetzt. Wir wählen die Zahl 10 000, weil wir unserer Rechnung die Tangententafel zu Grunde legen, und die genannte Zahl gleich der Tangente von 45 Grad gesetzt ist.

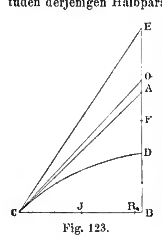


Fig. 123.

Gehen wir ans Werk. Wir ziehen CE, so dass der Winkel ECB grösser ist als ACB (jedoch immer noch spitz), es soll die Halbparabel construirt werden, die von EC berührt wird und deren Sublimität sammt Höhe gleich BA sei. Aus der Tafel der Tangenten wird die zum Winkel BCE gehörige Tangente BE aufgeschlagen; dieser Werth halbirt entspricht dem Punkte F. Dann bestimmt man die dritte Proportionale zu BF, BJ (gleich $\frac{1}{2}BC$), welche durchaus grösser als FA sein wird; sie sei gleich FO ($BF : BJ = BJ : FO$). Die dem Dreieck ECB eingeschriebene Parabel mit der Tangente CE und Amplitude CB hat die Höhe BF, die berechnet worden ist, und die Sublimität FO. Aber BO überragt die Strecke zwischen den Parallelen AG, CB, während wir in diesem Zwischenraum bleiben müssen, denn die gesuchte, wie die Parabel DC sollen von C aus mit gleichem Impulse beschrieben werden. Mithin ist eine andere, der gefundenen ähnliche Halbparabel zu suchen (denn unter dem Winkel BCE können unzählige grössere und kleinere einander ähnliche beschrieben werden), deren zusammengesetzte Sublimität und Höhe gleich BA sei. Es verhalte sich nun, wie OB zu BA, so die Amplituden BC zu CR, und CR wird gefunden sein als Amplitude einer unter dem Anstieg BCE beschriebenen Halbparabel, deren vereinigte Sublimität und Höhe der Entfernung zwischen den Horizontalen GA, CB gleichkommt,

was verlangt war. Das Verfahren ist mithin das beschriebene. Also zusammengefasst: Man schlage die Tangente zum gegebenen Winkel BCE auf, halbire den Werth, nehme $\frac{1}{2}BC$ und bilde zu beiden die dritte Proportionale, welche FO heisse, und berechnet CR so, dass CR zu BC wie BA zu OB sei, so hat man CR, die Amplitude. Ein Beispiel:

Es sei ECB gleich 50 Grad, die Tangente ist gleich 11 918, davon die Hälfte, also BF gleich 5959; die Hälfte von BC ist 5000; die dritte Proportionale zu beiden ist 4195, welches zu BF addirt 10 154 für BO ergiebt. Wie nun OB zu BA, also wie 10 154 zu 10 000, so sei BC, nämlich 10 000 (denn BC ist gleich BA), zu der gesuchten RC, welche 9848 ergiebt, während BC, die Maximalamplitude, gleich 10 000 ist. Die Amplituden der ganzen Parabeln betragen das Doppelte, 19 696 und 20 000. Eben so gross ist die ganze Amplitude für 40 Grad, da dieser Winkel eben so viel wie jener von 45 Grad abweicht.[46]

Sagr. Zu vollem Verständniss dieses Beweises fehlt mir die Erkenntniss, warum die dritte Proportionale zu BF, BJ (wie der Autor behauptet) durchaus grösser sei als FA.

Salv. Das lässt sich, wie ich meine, folgendermaassen beweisen: Das Quadrat der mittleren Proportionale zu zwei Linien ist gleich dem Rechtecke aus diesen beiden, daher ist das Quadrat von BJ oder BD gleich dem Rechteck aus der ersten FB und der anderen zu findenden Strecke; diese andere muss nothwendig grösser als FA sein, weil das Rechteck aus BF, FA kleiner ist als das Quadrat von BD, und zwar um das Quadrat von DF, wie *Euclid* bewiesen hat. Auch muss bemerkt werden, dass der Punkt F, der die Tangente EB halbirt, häufig oberhalb A und nur einmal auf A liegen wird; in letzterem Falle ist es selbstverständlich, dass die dritte Proportionale zur halben Tangente und zu BJ (welche die Sublimität ergiebt) oberhalb A liegt. Der Autor aber hat den Fall gewählt, wo es nicht offenbar war, dass die genannte dritte Proportionale stets grösser als FA sei, so dass sie, über F angesetzt, stets über die Horizontale hinausreiche. Setzen wir nun fort:

Es wird gut sein, mit Hülfe dieser Tabelle eine andere ergänzend hinzuzufügen für die Höhen der mit gleichem Impulse beschriebenen Parabeln, nach folgender Construction:

Probl. IV. Propos. XIII.

»Aus den in nachfolgender Tabelle gegebenen Amplituden der Halbparabeln sollen mit Beibehaltung des Impulses, den irgend eine hat, für alle anderen die Höhen der einzelnen Halbparabeln bestimmt werden.«

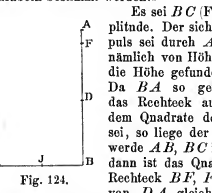


Fig. 124.

Es sei BC (Fig. 124) die gegebene Amplitude. Der sich stets gleich bleibende Impuls sei durch AB gemessen, die Summe nämlich von Höhe und Sublimität. Es soll die Höhe gefunden und bestimmt werden. Da BA so getheilt werden soll, dass das Rechteck aus seinen Theilen gleich dem Quadrate der halben Amplitude BC sei, so liege der Theilungspunkt in F. Es werde AB, BC in D und J halbirt. Alsdann ist das Quadrat von JB gleich dem Rechteck BF, FA, während das Quadrat von DA gleich ist demselben Rechteck mitsammt dem Quadrate von FD. Wenn nun vom Quadrate von DA das Quadrat von BJ abgezogen wird, welch letzteres gleich dem Rechteck BF, FA ist, so bleibt das Quadrat von FD nach; fügt man zu dessen Seite FD die Strecke BD hinzu, so erhält man die Höhe BF. Man verfährt daher folgendermaassen: Vom Quadrat von $\frac{1}{2}BA$ zieht man das Quadrat von BJ ab; aus dem Reste nimmt man die Quadratwurzel, fügt dieselbe zu BD hinzu, und man hat die Höhe BF gefunden. Ein Beispiel: Es soll die Höhe der Halbparabel von 55 Grad Anstieg gefunden werden. Aus der ersten Tabelle entnimmt man die Amplitude 9396, nimmt die Hälfte 4698, und bildet das Quadrat 22 071 204; das halbe Quadrat von BA ist stets gleich 25 000 000; der Ueberschuss über jene Zahl ist 2 928 796; daraus die Quadratwurzel gleich 1710, angenähert. Fügt man dieses zu $\frac{1}{2}BA$, nämlich 5000, hinzu, so hat man 6710, und so viel beträgt die Höhe BF. Noch eine dritte Tabelle zu erläutern wird nicht überflüssig sein für die Höhen und Sublimitäten von Halbparabeln gleicher Amplitude.[47])

Sagr. Letztere möchte ich gerne ansehen, da ich aus derselben den Unterschied der Impulse und Kräfte für gleiche Wurfweite der Geschosse erkennen kann, welcher je nach dem Anstieg sehr gross werden muss, so dass z. B., wenn man bei 3 oder 4 Graden oder bei 87 oder 88 die Kugel abschiesst bis zur Wurfweite von 45° (in welch letzterem Fall der kleinste

Impuls nöthig wird), man einen immensen Mehrbetrag an Kraft finden würde.

Salv. Sie haben vollkommen Recht, mein Herr, und Sie werden sehen, dass, um bei allen Anstiegen die Wirkung zu verfolgen, man in grossen Schritten sich in die Unendlichkeit begeben muss. Hier folgen die Tabellen:

I. Höhen der Halbparabeln mit verschiedenen Elevationswinkeln, »Anstieg«, bei gleichen Impulsen.

Anstieg	Höhe	Anstieg	Höhe	Anstieg	Höhe
1	3	31	2653	61	7649
2	13	32	2810	62	7796
3	28	33	2967	63	7939
4	50	34	3128	64	8078
5	76	35	3289	65	8214
6	108	36	3456	66	8346
7	150	37	3621	67	8474
8	194	38	3793	68	8597
9	245	39	3962	69	8715
10	302	40	4132	70	8830
11	365	41	4302	71	8940
12	432	42	4477	72	9045
13	506	43	4654	73	9144
14	585	44	4827	74	9240
15	670	45	5000	75	9330
16	760	46	5173	76	9415
17	855	47	5346	77	9493
18	955	48	5523	78	9567
19	1060	49	5698	79	9636
20	1170	50	5868	80	9698
21	1285	51	6038	81	9755
22	1402	52	6207	82	9806
23	1527	53	6379	83	9851
24	1655	54	6546	84	9890
25	1786	55	6710	85	9924
26	1922	56	6873	86	9951
27	2061	57	7033	87	9972
28	2204	58	7190	88	9987
29	2351	59	7348	89	9998
30	2499	60	7502	90	10000

II. »Amplituden« der Halbparabeln bei verschiedenem Anstieg bei gleichem Impulse.

Anstieg	Amplitude	Anstieg	Anstieg	Amplitude	Anstieg	Anstieg	Amplitude	Anstieg
45	10000	45	60	8659	30	75	5000	15
46	9994	44	61	8481	29	76	4694	14
47	9976	43	62	8290	28	77	4383	13
48	9945	42	63	8090	27	78	4067	12
49	9902	41	64	7880	26	79	3746	11
50	9848	40	65	7660	25	80	3420	10
51	9782	39	66	7431	24	81	3090	9
52	9704	38	67	7191	23	82	2756	8
53	9612	37	68	6944	22	83	2419	7
54	9511	36	69	6692	21	84	2079	6
55	9396	35	70	6428	20	85	1736	5
56	9272	34	71	6157	19	86	1391	4
57	9136	33	72	5878	18	87	1044	3
58	8989	32	73	5592	17	88	698	2
59	8829	31	74	5300	16	89	349	1

III. Höhen und Sublimitäten von Halbparabeln gleicher Amplitude, gleich 10000, bei verschiedenem Anstieg.

Anstieg	Höhe	Sublimität	Anstieg	Höhe	Sublimität	Anstieg	Höhe	Sublimität
1	87	286533	16	1434	17405	31	3008	8336
2	175	142450	17	1528	16355	32	3124	8002
3	262	95802	18	1624	15388	33	3247	7699
4	349	71531	19	1722	14522	34	3372	7413
5	437	57142	20	1820	13736	35	3500	7141
6	525	47573	21	1919	13025	36	3638	6882
7	614	40716	22	2020	12376	37	3768	6635
8	702	35587	23	2122	11778	38	3906	6395
9	792	31565	24	2226	11230	39	4048	6174
10	881	28356	25	2332	10722	40	4196	5959
11	972	25720	26	2438	10253	41	4346	5752
12	1062	23518	27	2547	9814	42	4502	5553
13	1154	21701	28	2658	9404	43	4662	5362
14	1246	20056	29	2772	9020	44	4828	5177
15	1339	18660	30	2887	8659	45	5000	5000

Anstieg	Höhe	Sublimität	Anstieg	Höhe	Sublimität	Anstieg	Höhe	Sublimität
46	5177	4828	61	9020	2772	76	20056	1246
47	5362	4662	62	9404	2658	77	21701	1154
48	5553	4502	63	9814	2547	78	23518	1062
49	5752	4346	64	10253	2438	79	25720	972
50	5959	4196	65	10722	2332	80	28356	881
51	6174	4048	66	11230	2226	81	31565	792
52	6395	3906	67	11778	2122	82	35587	702
53	6635	3768	68	12376	2020	83	40716	614
54	6882	3632	69	13025	1919	84	47573	525
55	7141	3500	70	13736	1820	85	57142	437
56	7413	3372	71	14522	1722	86	71531	349
57	7699	3247	72	15388	1624	87	95802	262
58	8002	3124	73	16355	1528	88	142450	175
59	8336	3008	74	17405	1434	89	286533	87
60	8659	2887	75	18660	1339	90	unendlich	0

Probl. V. Propos. XIV.

»Die Höhen und Sublimitäten von Halbparabeln, die gleiche Amplituden ergeben, für verschiedene Anstiege zu finden.«

Diese Aufgabe zu lösen ist leicht. Es sei die beständige Amplitude der Halbparabeln gleich 10 000; so werden die halben Tangenten die Höhen bei verschiedenem Anstieg ausdrücken. Wenn z. B. eine Parabel 30 Grad Anstieg hat, und die Amplitude 10 000 beträgt, wird die Höhe gleich 2887 sein, denn so gross ist die halbe Tangente des genannten Winkels. Aus der Höhe wird die Sublimität folgendermaassen erhalten: Es ist bewiesen, dass die halbe Amplitude der Halbparabel die mittlere Proportionale sei zur Höhe und Sublimität; da nur die Höhe bekannt ist, die halbe Amplitude aber stets 5000 betragen soll, so braucht man nur das Quadrat der letzteren Grösse durch die gegebene Höhe zu dividiren, der Quotient giebt die Sublimität. Die Höhe war 2887, das Quadrat von 5000 ist 25 000 000; dieses durch 2887 getheilt giebt nahezu 8659 für die Sublimität.[48])

Salv. Hier sieht man zunächst, wie sehr wahr die obige Bemerkung ist, dergemäss bei verschiedenem Anstieg, je mehr derselbe nach oben oder unten vom mittleren sich entfernt, einen um so grösseren Impuls verlangt, um dem Geschoss dieselbe

Wurfweite zu ertheilen. Denn der Impuls ist aus zwei Bewegungen zusammengesetzt, der gleichförmigen horizontalen und der beschleunigten verticalen, und von ihm hängen Höhe und Sublimität ab; aus der vorliegenden Tabelle sieht man, dass bei 45 Grad Anstieg die Summe beider am kleinsten ist; Höhe und Sublimität sind einander gleich und betragen eine jede 5000; ihre Summe ist gleich 10000. Bei anderer Steigung, von etwa 50 Grad, ist die Höhe 5959, die Sublimität 4196, zusammen 10155. Und gerade so gross ist der Impuls bei 40 Grad, da dieser Anstieg um eben so viel wie jener von 45 abweicht. Zweitens müssen wir es bestätigen, dass überall paarweise die Impulse einander gleich sind bei gleichem Abstand der Anstiege vom mittleren, mit jenem wunderbaren Wechsel, dass Höhe und Sublimität beim höheren umgekehrt der Sublimität und Höhe beim niedrigeren Anstieg entsprechen, so dass, während bei 50 Grad die Höhe 5959 und die Sublimität 4196 beträgt, umgekehrt bei 40 Grad die Höhe 4196 und die Sublimität gleich 5959 ist; dasselbe gilt überall ohne Ausnahme. Bei der Ausrechnung sind die Brüche fortgelassen, da dieselben neben so grossen Zahlen keine Bedeutung haben.[49])

Sagr. Ich bemerke soeben, dass von den beiden Impulsen, dem horizontalen und dem verticalen, je höher der Wurf, um so kleiner der erstere und um so grösser der letztere sei. Dagegen bei geringem Anstieg muss der horizontale Impuls stark sein bei geringer Höhe. Wenn ich nun auch vollkommen begreife, dass bei 90 Grad Anstieg selbst alle Kräfte der Welt nicht genügen, um auch nur einen Zoll Weite zu erwirken, da das Geschoss eben dort niedersinkt, wo es fortgeschleudert ward, so könnte ich doch nicht mit derselben Zuversicht darauf bauen, dass auch beim Anstieg 0, also in der Horizontalen, eine endliche Kraft nicht hinreichte, um irgend eine Wurfweite zu erlangen. Sollte selbst eine Feldschlange unfähig sein, eine Eisenkugel horizontal, oder, wie man sagt, vom weissen Punkte aus, d. h. ohne jeden Anstieg, abzuschiessen? Mir scheint in diesem Falle ein Zweifel möglich: ich leugne nicht durchaus die Thatsache, denn eine andere, nicht weniger merkwürdige Erfahrung macht mich stutzig, für welche ich zugleich den Erweis in der Hand habe. Ich meine die Unmöglichkeit, ein Seil vollkommen gerade auszuspannen, parallel dem Horizont; es bleibt stets krumm und keine Kraft reicht hin, es gerade zu strecken.

Salv. Also, Herr *Sagredo*, in letzterem Falle ist Ihr Erstaunen über den wunderbaren Effekt beseitigt, weil Ihr den

Erweis habt. Bei genauerer Betrachtnng aber werden wir einige Analogie zwischen den beiden fraglichen Erscheinungen entdecken. Die Krümmung der Linie beim horizontalen Wurf stammt von zwei Kräften her, deren eine (nämlich der Impuls des Geschosses) horizontal wirkt, während die andere (die Schwere) ihn senkrecht hinabtreibt. Beim Spannen des Seiles giebt es auch zwei Kräfte, die horizontale Spannkraft, und das Gewicht des Seiles, senkrecht zu jener hinabwirkend. Also liegen ähnliche Verhältnisse vor. Sprecht Ihr nun dem Gewicht des Seiles die Macht und Energie zu, jede noch so grosse Kraft zu überwinden, die dasselbe strecken soll, warum wollt Ihr sie leugnen beim Gewicht der Kugel? Aber noch mehr: wir empfinden Staunen und Freude, wenn das stark oder schwach gespannte Seil sich der parabolischen Form nähert und die Aehnlichkeit so gross ist, dass, wenn Ihr auf einer Ebene eine Parabel zeichnet und sie dann umgekehrt betrachtet, d. h. mit dem Gipfel nach unten, die Basis parallel dem Horizonte, und wenn Ihr eine kleine Kette mit ihren Enden an diese Basis der Parabel anlegt, dass alsdann die Kette mehr oder weniger sich krümmen und der genannten Parabel sich anschliessen wird; und zwar ist der Anschluss um so genauer, je weniger die Parabel gekrümmt, d. h. je mehr sie gestreckt ist, so dass in Parabeln von 45° Neigung die Kette fast ganz genau (quasi ad unguem) jene deckt.

Sagr. Man könnte also mit solch einer Kette, die schön gleichförmig und fein gearbeitet ist, im Augenblicke viele Parabeln auf einer Ebene abstecken.

Salv. Gewiss und mit grossem Vortheil, wie ich Euch bald zeigen werde.

Simpl. Ehe wir aber weiter gehen, möchte ich mich doch noch von der Richtigkeit der Behauptung überzeugen, die Ihr als völlig erwiesen hinstelltet, dass es nämlich unmöglich sei, selbst mit einer noch so grossen Kraft, ein Seil geradlinig horizontal zu spannen.

Sagr. Ich hoffe des Beweises mich zu erinnern. Um ihn zu verstehen, Herr *Simplicio*, müsst Ihr zuvor zugeben, dass bei allen mechanischen Werkzeugen nicht nur versuchsweise, sondern auch durch theoretische Beweise, feststeht, dass selbst die geringste Geschwindigkeit eines Körpers im Stande ist, jeden noch so grossen Widerstand eines Mediums zu überwinden; letzteres wird stets langsam bewegt, sobald die Geschwindigkeit des ersteren im Vergleich zu der des letzteren grösser ist, als

der Widerstand des zu bewegenden Körpers im Vergleich zur Kraft des bewegenden.

Simpl. Das ist mir sehr wohl bekannt; es ist von *Aristoteles* unter seinen mechanischen Problemen bewiesen; man sieht es deutlich beim Hebel, bei der Schnellwaage, wo das Laufgewicht, das nur 4 Pfund wiegt, ein Gewicht von 400 Pfund hebt, wenn die Entfernung des Laufgewichtes vom Centrum der Waage mehr als 100 mal grösser ist als die Entfernung des Aufhängepunktes des grossen Gewichtes von demselben Centrum: das

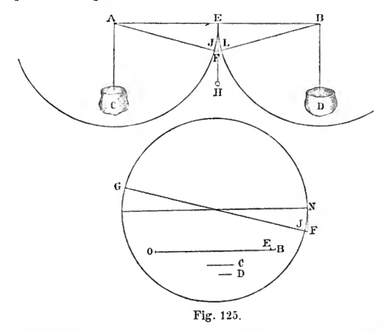


Fig. 125.

kommt daher, dass bei den Schwingungen des Waagebalkens das Laufgewicht einen 100 mal grösseren Weg zurücklegt, als derjenige ist, um welchen das grosse Gewicht emporsteigt. Mit anderen Worten, das kleine Gewicht bewegt sich mit einer 100 mal so grossen Geschwindigkeit.

Sagr. Das ist Alles vollkommen richtig, und Ihr zweifelt nicht daran, dass, so klein auch die Kraft des bewegenden Körpers sei, er doch einen jeden noch so grossen Widerstand überwinden kann, sobald das, was jenem an Kraft und Schwere abgeht, durch Geschwindigkeit ersetzt wird. Gehen wir nun zum gespannten Seile über. Es sei AB (Fig. 125) eine durch zwei

feste Punkte A und B gehende Linie. An beiden Enden mögen zwei sehr grosse Gewichte C, D hängen, die mit grosser Kraft wirkend die Gerade vollkommen strecken, so lange die letztere ohne alle Schwere gedacht wird. Nun aber fügen wir hinzu und behaupten, dass, wenn in der Hälfte bei E ein noch so kleines Gewicht angehängt wird, wie etwa H, die Linie AB nachgeben und bis F sich senken wird, indem sie zugleich sich ausdehnt und die C, D veranlasst, empor zu steigen, was Ihr aus Folgendem erkennen könnt. Um A und B als Centren beschreiben wir zwei Quadranten EFG, ELM; und da die beiden Halbmesser AJ, BL gleich den Strecken AE, EB sind, so werden FJ und FL die Verlängerungen sein, d. h. die Ueberschüsse von AF, FB über AE, EB; dieselben bestimmen die Hubhöhen der Gewichte C, D, sobald H den Punkt F erreicht hat, was nur geschehen kann, wenn die Linie EF (d. h. die Senkung von H) im Verhältniss zu FJ (welches die Hubhöhen von C und D bedingt) grösser ist, als das Gewicht jener beiden C, D im Verhältniss zu dem von H. Aber dieses muss stets sein, wenn man C, D möglichst gross und H sehr klein wählt. Denn der Ueberschuss von C, D über H ist nicht so gross, als dass er nicht durch den Ueberschuss der Tangente EF über das Secantenstück FJ dargestellt werden könnte. Letzteres erkennen wir folgendermaassen: es sei ein Kreis mit dem Durchmesser GJ gegeben, und wie sich die Gewichte C, D zu H verhalten, so sei BO zu einer anderen Geraden C, welche grösser als D sei, so dass das Verhältniss BO zu D grösser als das von BO zu C sei; man construire zu OB, D die dritte Proportionale BE und mache, wie OE zu EB, so GJ zur Verlängerung JF; von F aus ziehe man eine Tangente FN. Und weil OE zu EB wie GJ zu JF gemacht war, so verhält sich auch GF zu FJ wie OB zu BE. Aber zu OB, BE ist die mittlere Proportionale gleich D, und diejenige zu GF, FJ gleich NF; folglich verhält sich NF zu FJ wie OB zu D, und dieses Verhältniss ist grösser als das der Gewichte C, D zu H. Es hat also die Senkung oder Geschwindigkeit von H zur Hebung oder Geschwindigkeit der Gewichte C, D ein grösseres Verhältniss, als die Gewichte C, D zum Gewichte H; folglich muss H sinken und die Linie AB wird die Horizontale verlassen. Was aber mit der gewichtlosen AB geschieht bei der kleinsten Belastung in E, wird auch mit einem schweren Seile geschehen ohne Hinzufügung eines besonderen Gewichtes, wie wenn man das Gewicht des Seiles AB anbrächte.

Simpl. Nun bin ich vollständig befriedigt, und Herr *Salviati* wird seinem Versprechen gemäss uns den Nutzen erläutern, den wir sonst noch von der Kette ziehen können. Danach wollte er uns noch die Gedanken unseres Autors über die Kraft des Stosses mittheilen.

Salv. Für heute mag es genug sein, denn es ist spät geworden, und eine Stunde würde lange nicht hinreichen, den genannten Stoff zu erschöpfen; schieben wir deshalb die Erläuterung dieser Frage auf bis zu gelegener Zeit.

Sagr. Ich muss Ihnen beistimmen, da ich aus mancher Unterhaltung mit den vertrauten Freunden unseres Akademikers erkannt habe, dass diese Frage äusserst dunkel sei, und keinem von denen, die dieselbe früher behandelt haben, ist es gelungen, ihre finsteren Schlupfwinkel, die weit von den gewöhnlichen Vorstellungen der Menschen abliegen, zu ergründen; eine der wunderlichsten fällt mir soeben ein, dass die Stosskraft unbestimmt, wenn nicht unendlich gross sei. Wollen wir also abwarten, wann es Herrn *Salviati* gelegen ist. Einstweilen sagen Sie mir, was folgt jetzt auf die Abhandlung über den Wurf?

Salv. Es sind das einige Lehrsätze über den Schwerpunkt fester Körper; unser Akademiker hat in seinen jungen Jahren einiges entdeckt, was in dem von *Federigo Comandino* ähnlich behandelten Gebiete unvollkommen geblieben war. In den hier folgenden Sätzen glaubte er eine Ergänzung zum Buche des *Comandino* geben zu können und schloss dieselbe hier an auf den Rath des Herrn Marchese *Guid' Ubaldo del Monte*, dem bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie aus seinen vielen Schriften hervorgeht. Diesem Herrn gab er auch eine Abschrift und hoffte später die Untersuchung auf Körper zu beziehen, die vom *Comandino* nicht behandelt waren; als er aber nachher denselben Gegenstand im Buche des Herrn *Luca Valerio*, dem grossen Geometer, fand und sah, dass derselbe den ganzen Stoff lückenlos bearbeitet hatte, so liess er die Sache fallen, obgleich methodisch er dieselbe ganz anders als Herr *Valerio* angefasst hatte.

Sagr. So lasst mir denn inzwischen das Buch, damit ich in der Zwischenzeit bis zu unserer nächsten Zusammenkunft die Sätze durchsehen und mir aneignen kann.

Salv. Ihrem Wunsche komme ich gerne nach und hoffe, dass Sie an der Lehre Gefallen finden werden.

Ende des vierten Tages.

Anmerkungen.

Der dem Leser hier vorliegende dritte und vierte Tag gehört zn den hervorragendsten Leistungen *Galilei*'s. In der Art der Abfassung dem ersten und zweiten Tage verwandt, finden wir hier ein streng geordnetes System der Fallgesetze vor. Der Text ist gebnndener, und meist lateinisch geschrieben. Die Unterredungen zwischen den drei Personen treten ab und zu ein, sind im Original italienisch abgefasst und bilden oft willkommene Ergänzungen zum streng gehaltenen Text. Nachstehend wollen wir auf die besonders interessanten Probleme und deren Lösnngen aufmerksam machen, alle Haupttheoreme aber in moderner analytischer Form wiedergeben. Manche Aufgabe wäre werth, der Vergessenheit entzogen und in die Lehrbücher anfgenommen zu werden. Der Docent sowie der Schüler wird vielfach Anregung finden, die Lehre vom Fall und von der Wurfbewegnng zu vertiefen. Erstannlich erscheint einem die Leistung *Galilei*'s, wenn man bedenkt, dass auf diesem Gebiete schlechterdings gar nichts vorlag, als irrige Ansichten auf Grund ganz unberechtigter Antorität. Von dem dritten und vierten Tage speciell sagt *Lagrange:* »es gehöre ein ausserordentliches Genie dazu, sie zu verfassen, man werde dieselben nie genug bewundern können«.

Dritter Tag.

1) *Zu S. 5.* Der anfgestellten Definition entsprechend, würden wir, die Strecken mit s, die Zeiten mit t, die gleichförmige Geschwindigkeit mit c bezeichnend, sagen: $s = c \cdot t$. Die vier Axiome sind zu je zweien gepaart. Vorstehende Gleichung führt, wenn man für eine zweite Bewegung $s' = c' \cdot t'$ setzt, zu Axiom I und II, wenn $c = c'$ ist:

Axiom I: $s : s' = t : t'$
Axiom II: $t : t' = s : s'$

dagegen zu Axiom III und IV, wenn $t = t'$ ist

Axiom III: $s : s' = c : c'$
Axiom IV: $c : c' = s : s'$.

2) *Zu S. 6.* Die beiden ersten Theoreme bringen keinen neuen Gedanken, sobald der Begriff der Proportion als gegeben angesehen wird. Lehrsatz III nimmt $s = s'$ an, und beweist, dass $c : c' = t' : t$. Die Breite der Beweisführung ist nichts als eine Euclidische Fessel. Im historischen Interesse beachte man deshalb die Unterredung in dem fünften Tage, der lediglich dem Begriff der Proportion gewidmet ist.

3) *Zu S. 8.* Der ganze Satz bringt nicht mehr als $\frac{s}{s'} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{t}{t'}$. — Ebenso ist das folgende Theorem erledigt mit $\frac{t}{t'} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{c'}{c}$ und das sechste mit $\frac{c}{c'} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t'}{t}$.

4) *Zu S. 21.* Wenn $v = g \cdot t$, so ist $\sigma = \frac{g \cdot t}{2}$.

5) *Zu S. 22.* Wenn $v = g \cdot t$, so ist $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

6) *Zu S. 26.* Wenn $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ und $s' = \frac{1}{2} g \cdot t'^2$, so ist $s : s' = t^2 : t'^2$, mithin auch $s^2 : ss' = t^2 : t'^2$, folglich $t : t' = s : \sqrt{s \cdot s'}$; ein in neuerer Zeit vielleicht zu wenig beachteter Lehrsatz.

7) *Zu S. 27.* Wenn $v = g \sin \alpha \cdot t$ und $v' = g \sin \alpha \cdot t'$, so ist $v : v' = t : t'$ unabhängig von α, dem Neigungswinkel der Ebene.

8) *Zu S. 30.* Da $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ und $p = r \sin \alpha = r \cdot \frac{h}{l}$, so ist $p : r = h : l$.

9) *Zu S. 30.* $p = r \cdot \frac{h}{l}$, $p' = r \cdot \frac{h}{l'}$, folglich $p : p' = l' : l$.

10) *Zu S. 31.* Es ist $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, wenn $AC = h$ gesetzt wird, und $t = \frac{v}{g}$.

Ferner ist

$$AD = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \frac{v^2}{g^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\sin \alpha \cdot 2gh}{g} = h \sin \alpha,$$

welches zu beweisen Galilei unterlässt. Der im Text gegebene Gedankengang entspricht nur den Beziehungen:

$$v' = g \sin\alpha \cdot t'; \; AB = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha \, t'^2;$$

$$v' = g \sin\alpha \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g \sin\alpha}} = \sqrt{2g \sin\alpha \cdot AB} = \sqrt{2g \cdot AC} = v,$$

also ist in gleichem Horizonte bei jeglicher Neigung dieselbe Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g \cdot h}$ erreicht.

11) *Zu S. 31.* Weil $v = g \cdot t$ und $v' = g \sin\alpha \cdot t'$, so ist, da $v = v'$ ist, $t : t' = \sin\alpha : 1 = AC : AB$.

12) *Zu S. 32.* Es ist dieser Satz identisch mit dem vorigen, mit blosser Vertauschung der Glieder. Wir würden sagen: Da $l = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t'^2$ und $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, so ist $l \sin\alpha = h = \frac{1}{2} g \sin\alpha^2 \, t'^2$, mithin $\frac{t}{t'} = \sin\alpha = \frac{h}{l}$, d. h. die Fallzeiten verhalten sich wie die Fallstrecken (bei gleicher Höhe).

13) *Zu S. 33.* Auf Grund des vorigen Satzes folgt $t' : t'' = l' : l''$.

14) *Zu S. 33.* Der Bedingung gemäss ist $l = \frac{1}{2} g \cdot \frac{h}{l} \cdot t^2$ und auch $l = \frac{1}{2} g \cdot \frac{h'}{l} \cdot t'^2$, mithin $t : t' = \sqrt{h'} : \sqrt{h}$. — *Galilei's* Beweis setzt, in Formeln gekleidet, voraus: weil $BJ^2 = BD \cdot BE$, so ist $\frac{BD^2}{BJ^2} = \frac{BD}{BE}$, mithin $\frac{BD}{BJ} = \sqrt{\frac{BD}{BE}}$, u. s. f.

15) *Zu S. 34.* Wenn $l = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{l} \cdot t^2$ und $l' = \frac{1}{2} \frac{h'}{l'} \cdot t'^2$, so ist $\frac{t}{t'} = \frac{l}{l'} \cdot \frac{\sqrt{h'}}{\sqrt{h}}$.

16) *Zu S. 35.* $l = \frac{1}{2} g \cdot \frac{h}{l} \cdot t^2$ oder $l^2 = \frac{1}{2} g \cdot h \cdot t^2$

und

$$l'^2 = \tfrac{1}{2} g \cdot h' \cdot t'^2$$

aber

$$l^2 = 2 \cdot d \cdot h \text{ und } l'^2 = 2 \cdot d \cdot h',$$

folglich

$$t = t'.$$

17) *Zu S. 36.* $l^2 = \frac{1}{2} g \cdot h \cdot t^2$, wie vorhin, und wenn der Durchmesser d genannt wird, $d = \frac{1}{2} g \cdot t'^2$; aber $l^2 = d \cdot h$, folglich $t = t'$.

18) *Zu S. 39.* Wenn $l^2 = \frac{1}{2} g \cdot h \cdot t^2$ und $l'^2 = \frac{1}{2} g \cdot h' \cdot t'^2$ und $l^2 : l'^2 = h : h'$, so ist $t = t'$.

19) *Zu S. 41.* Längs den beiden Ebenen gelten

$$l = \frac{1}{2} g \sin LCD \cdot t^2$$

und

$$l' = \frac{1}{2} g \sin BCE \cdot t'^2.$$

Nun enthält die etwas verworrene Bedingung die Proportion

$$l : l' = \sin LCD : \sin BCE,$$

mithin ist

$$t = t'.$$

20) *Zu S. 43.* Allgemein ist $v = a + g t$ und

$$v' = a + g \sin \alpha \cdot t'.$$

Da

$$v = v',$$

so folgt

$$t = t' \sin \alpha$$

oder

$$t : t' = h : l$$

21) *Zu S. 43.* Es ist

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

und

$$h' = \frac{1}{2} g \cdot t'^2,$$

also

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

und

$$t' = \sqrt{\frac{2h'}{g}},$$

also

$$t' - t = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h'} - \sqrt{h}).$$

Mithin

$$t : (t' - t) = \sqrt{h} : \sqrt{h'} - \sqrt{h} = h : \sqrt{h \cdot h'} - h,$$

q. e. d.

22) *Zu S. 45.* Es seien die Strecken $AB = s$, $AC = s'$, $FB = r$, $FD = r'$, die entsprechenden Fallzeiten t, t', τ, τ', so ist nach einem früheren Satze (s. Anm. 6)

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{ss'}}{s'}$$

und

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{\sqrt{rr'}}{r'},$$

ferner auch

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t'}{\tau'} = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}.$$

Mithin

$$\frac{\tau' - \tau}{\tau'} = \frac{r' - \sqrt{rr'}}{r'}$$

und

$$\frac{\tau' - \tau}{t'} = \frac{r' - \sqrt{r \cdot r'}}{s'},$$

also

$$\frac{\tau' - \tau}{t} = \frac{r' - \sqrt{rr'}}{\sqrt{s \cdot s'}},$$

folglich

$$\frac{t + \tau' - \tau}{t} = \frac{\sqrt{s \cdot s'} + r' - \sqrt{r \cdot r'}}{\sqrt{s \cdot s'}}$$

und

$$\frac{t'}{t + \tau' - \tau} = \frac{s'}{\sqrt{s \cdot s'} + r' - \sqrt{r \cdot r'}},$$

q. e. d. Bei diesem Theorem bietet die geometrische Betrachtung des Textes mehr Anschaulichkeit.

23) *Zu S. 46.* Analytisch ergiebt sich, wenn die senkrechte Fallstrecke $= a$, die gesuchte $= x$ ist,

$$a = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

und

$$x = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{a}{x} \cdot t^2 + g t^2,$$

folglich

$$x = \frac{a^2}{x} + 2a,$$

woraus

$$x = a(1 + \sqrt{2})$$

folgt.

24) *Zu S. 47.* Aehnlich wie in der vorigen Aufgabe wird der analytische Ansatz geben

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2$$

nnd

$$a = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{h}{a} t^2 + g t^2 ,$$

wo h und a gegeben sind. Hieraus folgt

$$a = \frac{xh}{a} + 2x ,$$

mithin

$$x = \frac{a^2}{h + 2a} .$$

Dieser Werth von x entspricht dem ersten Theile der Lösung, die *Galilei* giebt, da

$$x : a = a : h + 2a .$$

Statt nun sogleich x, gleich EA in der Figur, als AX in die Senkrechte zu übertragen, womit X gefunden wäre, setzt der Autor erst in der Geneigten AR, welche y heissen mag, an, und macht

$$y = \frac{a}{h} \cdot x .$$

Die Parallele RX bestimmt AX, welches x' heissen mag, so dass

$$x' = \frac{h}{a} \cdot y ;$$

folglich wird

$$x' = x,$$

entsprechend unserem Texte. — Der Beweis im letzteren stützt sich auf mehrere andere Zwischensätze.

25) *Zu S. 49.* Es sei t die Fallzeit durch die oben hinzugefügte Strecke, t' diejenige längs EC nach dem Falle durch AE, und t'' diejenige für EB, nach dem Falle durch AE, ferner sei $EC = l$ und $EB = d$ gesetzt, so ist

$$d = \tfrac{1}{2} g t'^2 + g t \cdot t'$$

nnd

$$l = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{l}{d} t''^2 + g t'' \cdot t$$

oder

$$d = \tfrac{1}{2} g \cdot t''^2 + \frac{d}{l} \cdot g t'' \cdot t,$$

folglich

$$t'^2 + 2t \cdot t' + t^2 = t''^2 + 2\frac{d}{l} t'' \cdot t + t^2,$$

mithin, da $d > l$ ist,

$$t' > t''.$$

26) *Zu S. 50.* Wenn $AB = a$, die Neigung $= \alpha$ und die gesuchte Strecke x heisst, so kann man setzen

$$a = \tfrac{1}{2} g t^2$$

und

$$x = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha t + g t^2,$$

folglich ist

$$x = a \sin \alpha + 2a.$$

Der im Text gegebenen Lösung gemäss ist, wenn man

$$\frac{1}{\sin \alpha} = k$$

setzt,

$$\frac{ak}{ak + a} = \frac{ak + a}{ak + x},$$

woraus der obige Werth für x sich ergiebt.

27) *Zu S. 51.* Die analytische Lösung führt zu

$$(x + a)^2 - x^2 = b^2,$$

wo

$$AB = b$$

und die gegebene kleinere Zeitgrösse $= a$ gesetzt ist. Hieraus folgt

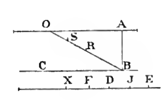
$$x = \frac{b^2 - a^2}{2a},$$

welches zu einer weitläufigeren Construction führt, die indess nicht uninteressant ist. — *Galilei*'s kurze und hübsche Lösung führte zur Aufgabe, den Punkt E als Mittelpunkt eines Kreises aufzusuchen, der in B von AB berührt wird, während der Ueberschuss der Sekante EA über den unbekannten Radius EB gegeben ist. Eine Senkrechte in dem Halbirungspunkte von AC giebt in E das gesuchte Centrum.

28) *Zu S. 61.* Die im Text gegebenen Proportionen führen nach einer kurzen Rechnung zu

$$\frac{XE}{AB}=\frac{AB}{2AB-EF}.$$

Die unbekannte XE findet man also nach folgender Construction. — In Fig. 86' sei AB gegeben. Man verlängere



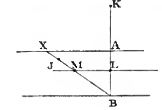


Fig. 86'.

nach oben und verdoppele, so dass BK gleich $2AB$, nehme KL gleich dem gegebenen EF, ziehe durch L eine Horizontale und schlage um B mit BA einen Kreis AM. Die Gerade BM verlängert ist die gesuchte Ebene, BJ gleich KL die verlangte Bahnstrecke.

29) *Zu S. 64.* Uebersichtlicher ist dem Texte entsprechend:

$$OB^2=EB\cdot BA,$$

$$\frac{EB}{BA}=\frac{OB}{BN},$$

folglich

$$\frac{OB}{BN}=\frac{OB^2}{BA^2},$$

aber

$$\frac{OB}{BN}=\frac{OB}{BA}\cdot\frac{BA}{BN},$$

folglich

$$\frac{BA}{BN}=\frac{OB}{BA},$$

mithin

$$OB+BN>2BA.$$

30) *Zu S. 70.* Hier liegt eine der scharfsinnigsten Lösungen vor. Um das Verständniss des langen Beweises dem Leser zu

erleichtern, fassen wir, der Construction entsprechend, den gesuchten Werth von CE, wofür wir x setzen, in seiner Abhängigkeit von AB, welches $= c$ sei, und von AC, welches wir $= a$ setzen wollen, zusammen. Der Construction gemäss ist

$$CE = \frac{BJ^2}{AC} = \frac{(AB - AL)^2}{AC},$$

aber

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BN},$$

folglich auch

$$\frac{AL}{AC} = \frac{AB}{AB + BN} = \frac{AB}{2AB - AC},$$

mithin

$$CE = \frac{\left(AB - \frac{AB \cdot AC}{2AB - AC}\right)^2}{AC} = \frac{\left(c - \frac{a \cdot c}{2c - a}\right)^2}{a} = \frac{4c^2(c-a)^2}{a\,(2c-a)^2}$$

Diesem Ausdrucke entspricht die Construction; auf analytischem Wege erhält man denselben Werth durch den Ansatz:

$$c = \tfrac{1}{2} g \frac{a}{c} (t + t')^2$$

$$z = \tfrac{1}{2} g \frac{c}{a} t^2$$

$$c + z = \tfrac{1}{2} g \frac{a}{c} \left(\frac{c}{a} t + t'\right) \cdot$$

Wir haben hier $RA = z$ gesetzt, welches $= \frac{c}{a} x$ ist. Eliminirt man t und t', so findet man zuerst

$$t' = \frac{a}{2\,(c-a)} \cdot t,$$

welches eine ganz interessante Beziehung für das Verhältniss von t' (der Fallzeit längs c) zu t (der Fallzeit längs x) aufweist, es ist

$$t' : t = AC : 2BN, \text{ aber auch } = AJ : JB,$$

wie letzteres allein unser Autor beweist. — Eliminirt man t' und führt ans der zweiten Gleichung für t die Grösse z ein, so kommt

$$c + z = \left(1 + \frac{a^2}{2c(c-a)}\right)^2 \cdot z\,,$$

woraus

$$z = \frac{4c^3}{a^2} \cdot \frac{(c-a)^2}{(2c-a)^2},$$

mithin

$$x = \frac{4c^2}{a} \cdot \frac{(c-a)^2}{(2c-a)^2}.$$

Gefunden aber hat *Galilei* die Lösung gewiss nur durch seine geniale Methode, die Fallzeiten durch Strecken darzustellen, da er den analytischen Ansatz nicht hat haben können. — Die oben mitgetheilte Beziehung

$$\frac{t}{t'} = \frac{2(c-a)}{a}$$

zeigt, dass dieses Verhältniss einen um so kleineren Werth bei constantem a erhält, je steiler AB genommen wird. Je grösser die Neigung von c, um so grösser ist $\frac{t}{t'}$. Indess ist t' in kleine Grenzen eingeschränkt und ist am grössten, wenn c mit a zusammenfällt, nämlich $= 2\sqrt{\frac{a}{2g}}$, dagegen nimmt auffallender Weise mit wachsendem c die Grösse t' ab und ist am kleinsten, wenn c unendlich lang, die geneigte Ebene in eine horizontale übergegangen ist. Es hat dann den Werth $\sqrt{\frac{a}{2g}}$, mithin ist das Minimum von t' gleich der Hälfte des Maximums. Der allgemeine Werth ist

$$t' = \frac{2c}{2c-a} \cdot \sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{2c}} \sqrt{\frac{a}{2g}} \quad (\text{NB. } c > a)$$

Zur Construction von x schreibe man

$$a \cdot x = \left(\frac{2c(c-a)}{2c-a}\right)^2 = k^2.$$

In Fig. 95′ sei $AC = a$, $AB = c$. Man verdoppele AB bis G, trage bei G und bei B die Strecken $GK = a$ und $BP = a$ ab, so sind die Ueberschüsse

$$KA = 2c - a$$
$$PA = c - a$$

Mit AG schlage man einen Bogen bis N in der Horizontalen, so ist $AN = 2c$. Man ziehe KN und von P nach O eine Parallele zu KN, so ist $AO = k$. Durch C und O schlage man einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt in AC oder dessen Verlängerung liege, so schneidet der Kreis die Senkrechte im gesuchten Punkte X, entsprechend dem vorstehenden Ausdrucke für $XA = x$. Von Interesse ist noch die Fallzeit durch die senkrechte Strecke XA; es ist

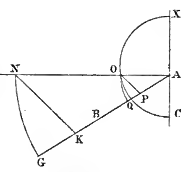


Fig. 95'.

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{2c(c-a)}{a(2c-a)} \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

und setzt man den Maximalwerth von t' gleich T, so war

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

dagegen die Hülfsgrösse

$$k = AO = \frac{2c(c-a)}{2c-a},$$

folglich wird ganz allgemein

$$t = \frac{k}{a} \cdot T,$$

d. h. wie AO zu AC, so verhält sich die Fallzeit längs XA zur Fallzeit längs AC, von A aus. Addirt man t und t', so kommt

$$t + t' = \frac{c}{a} \cdot T,$$

wie a priori bekannt war, da die Fallzeiten längs AB und AC sich wie diese Strecken verhalten. Endlich ist noch

$$t' = \frac{c-k}{a} \cdot T = \frac{BQ}{CA} \cdot T,$$

stets > 0, weil stets $c > k$ ist. — Uebrigens ist T auch schlechthin die Fallzeit für $AC = a$ von A aus.

31) *Zu S. 72.* Unmittelbar an das vorige Problem sich anschliessend muss jetzt $XA = x$ als gegeben betrachtet werden; c und a sind gesucht. Da aber die Neigung n gegeben ist, so kann man die letzte durch zwei Strecken $AB' = c'$ und $AC' = a'$ als gegeben betrachten. — Dann ist

$$a = \left\{\frac{(2c' - a') \cdot a'}{(c' - a') \cdot 2c'}\right\} \cdot x .$$

Zur Construction setzen wir

$$k' = \frac{2c'(c' - a')}{(2c' - a')},$$

alsdann ist

$$a = \frac{a'^2}{k'^2} \cdot x ;$$

sei ferner

$$k'' = \frac{a'^2}{k'},$$

so wird

$$a = \frac{k''}{k'} \cdot x .$$

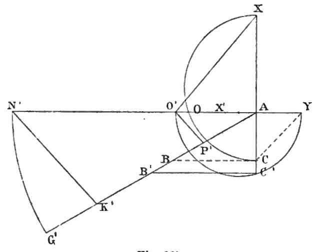


Fig. 96'.

Also ganz ähnlich wie vorhin verfahre man mit c' und a' (Fig. 96′) und findet O', so dass $AO' = k'$. Alsdann schlägt man einen Halbkreis durch $O'C'$, dessen Centrum in AO' liegt, und findet $AY = k''$. Verbindet man noch O' mit dem gegebenen Punkte X und zieht YC parallel $O'X$, so ist C der gesuchte Punkt, sofern eine Parallele zum Horizonte CB den Endpunkt B der fraglichen Strecke ergiebt.

32) *Zu S. 76.* Die Genialität *Galilei*'s leuchtet aus der Handhabung des vorliegenden Theorems in solchem Grade hervor, dass wir den Leser dringend zum Studium der Aufgabe auffordern möchten. Man fasse dieselbe analytisch an; man wird grosse Mühe haben, während unseres Autors Methode bewundernswerth dasteht. Die Analyse giebt für die Fallzeit längs DC (die wir t'' nennen wollen, während die für DB gleich t, und die für BC, von der Ruhe in D an, gleich t' sei), folgendes:

$$t'' = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

(welcher Werth auch für die Fallzeit BC von B aus gilt)

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2rh}},$$

$$t' = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\sqrt{2rH} - \sqrt{2rh}}{\sqrt{2rh'}},$$

wo die Höhe von $DB = h$, die von $BC = h'$ und $h + h' = H$ gesetzt ist. Indess ist hier der Beweis dafür, dass $t + t'$ stets $< t''$ sei, äusserst umständlich, weil a durch r, h und h' ausgedrückt werden muss, während eine geometrische Construction der drei Zeitgrössen leicht auszuführen ist. Freilich hat *Galilei* drei Hülfssätze voraufgehen lassen, die die Beweisführung kürzer erscheinen lassen.

33) *Zu S. 77.* Man hat *Galilei* oft den Irrthum zugesprochen, als habe er den Kreisbogen für eine absolute Brachistochrone gehalten, und so in der That klingt der erste Satz, demgemäss »die schnellste Bewegung längs dem Kreisbogen stattfinde«. Allein die Schlussworte unseres Abschnittes sind völlig correct, denn es wird eben nur bewiesen, dass jeder Kreisbogen in kürzerer Zeit durchlaufen wird, als irgend ein eingeschriebenes Polygon.

34) *Zu S. 78.* Die unbekannte Strecke AE sei x, $AD = x'$,

$AC = l$, $AB = h$ gesetzt, ferner die drei entsprechenden Fallzeiten t', t'', t''' und die für h sei t. Alsdann ist analytisch:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$x = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{h}{l} \cdot t'^2,$$

$$x' = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{h}{l} \cdot (t' + t'')^2.$$

Da nun $x' - x = h$ und $t'' = t$ sein soll, so ist

$$h = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{h}{l} \cdot (t^2 + 2tt'),$$

und wenn man t einsetzt, so wird

$$t' = \frac{l - h}{\sqrt{2gh}},$$

also

$$x = \left(\frac{l-h}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l}.$$

Die Construction dieses Werthes entspricht genau dem Gange, der im Text eingeschlagen ist.

35) *Zu S. 78.* Aus

$$\frac{t}{t' + t'' + t'''} = \frac{h}{l}$$

findet man durch Einsetzen der Werthe von t, t' und t'', dass $t''' = t'$ ist, in der That eine sehr bemerkenswerthe Beziehung.

Vierter Tag.

36) *Zu S. 94.* Es dürfte zweckmässig sein, das Fremdwort Sublimität beizubehalten, statt dasselbe durch Erhabenheit u. a. zu ersetzen. Die erste Bedeutung von sublimis ist die des Erhabenseins oder des Emporragens. Da in der Geometrie bisher das Wort Sublimität nirgends gebraucht worden ist, so durfte es um so mehr für die wichtige von *Galilei* eingeführte Grösse eingeführt werden.

37) *Zu S. 97.* Der Text heisst: quanto alla misura del tempo, abbiamo la comunemente ricevuta per tutto delle ore,

minuti primi e secondi. Nun heisst wörtlich minuto eine kleine Zeitgrösse. Aus minuti primi sind später »Minuten«, aus minuti secondi sind »Secunden« geworden.

38) *Zu S. 100.* Wir haben den Text möglichst wortgetreu wiedergegeben und deshalb die Bezeichnung potentia oder italienisch in potenza mit »in der Potenz« übersetzt, obwohl in der heutigen Algebra man nicht mehr so sich ausdrückt. Am auffälligsten ist hier an letzter Stelle der Ausdruck, da die Diagonale eines gleichseitigen rechtwinkligen Dreieckes gemeint ist; diese Diagonale, heisst es, sei »in der Potenz« gleich jenen beiden Seiten, folglich »in der Potenz« gleich dem Doppelten einer Seite. Verständlich wird der Ausdruck, wenn man die Diagonale $= d$, die Seiten mit x bezeichnet, da

$$d^2 = 2 \cdot x^2.$$

39) *Zu S. 104.* Analytisch wäre die gesuchte Sublimität $x = \frac{1}{2} g t^2$. Die gegebene Parabel sei $y^2 = p \cdot x$, die x-Axe senkrecht, der Coordinatenanfang im Gipfel. Die Fallzeit für AH sei t', so ist

$$(g t \cdot t')^2 = p \cdot \tfrac{1}{2} g t'^2,$$

mithin

$$t^2 = \tfrac{1}{2} \frac{p}{g}, \text{ aber auch } = \frac{2x}{g},$$

folglich

$$x = \frac{p}{4},$$

eine viel allgemeinere Lösung, als im Text; letzterem zu genügen wäre

$$y'^2 = p x',$$

folglich

$$x = \left(\frac{y'}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x'},$$

welches genau *Galilei*'s Construction ist. Welche Parabel aber auch gegeben sei, die Sublimität ist stets gleich dem vierten Theile des Parameters. Solches erhellt sofort, wenn die Amplitude gleich der doppelten Höhe ist. Bei beliebiger Amplitude und Höhe findet man die Sublimität durch Ermittelung des Parameters; das führt zu folgender Construction,

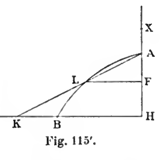


Fig. 115'.

die etwas einfacher ist, als die im Texte. Man verlängere den Horizont, mache $KH = 2AH$, ziehe AK, findet den Schnittpunkt L, die Horizontale LF giebt den Brennpunkt, und $XA = AF$ giebt die Sublimität.

40) *Zu S. 104.* Nach unserer Bezeichnung, da

$$y'^2 = p \cdot x'$$

und Sublimität

$$s = \frac{p}{4},$$

$$\left(\frac{y'}{2}\right)^2 = s \cdot x'.$$

41) *Zu S. 106.* Der Satz ist leicht zu beweisen, wenn analytische Ansätze gestattet werden. Wenn die Amplitude a, die Höhe h, Sublimität s genannt wird, so ist stets

$$a^2 = p \cdot h \quad \text{und} \quad s = \frac{p}{4},$$

folglich

$$s = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{h}.$$

Die horizontale Geschwindigkeit heisse u, die verticale v, so ist

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

mithin der Impuls

$$i = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{2g(h + s)},$$

also

$$i = \sqrt{2g\left(h + \frac{a^2}{4h}\right)},$$

welches ein Minimum wird, bei gegebenem a, wenn

$$h = \frac{a}{2}.$$

Wir gewinnen zugleich den Satz

$$i = \sqrt{2g \cdot (h + s)},$$

gleich der durch $h + s$ bei senkrechtem Fall erzeugten Geschwindigkeit, wie solches in der Propos. X bewiesen wird, im Uebrigen aber aus dem Satz der Constanz der Energien unmittelbar erhellt.

42) *Zu S. 108.* Der analytische Beweis dieses Satzes pflegt in allen Lehrbüchern gegeben zu werden. Bei der Steigung α und der Anfangsgeschwindigkeit i wird

$$x = i \cos \alpha \cdot t \quad \text{und} \quad y = i \sin \alpha \cdot t + \tfrac{1}{2} g t^2,$$

und eliminirt man t, so kommt die Parabel

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{i^2 \cos^2 \alpha}.$$

Es wird ferner x gleich der Wurfweite W, wenn $y = 0$ ist, woraus

$$W = \frac{2 i^2}{g} \cos^2 \alpha \, tg \, \alpha = \frac{i^2}{g} \sin 2 \alpha.$$

Der Anblick dieses Ausdrucks giebt den Lehrsatz.

43) *Zu S. 109.* Folgt aus

$$\frac{a^2}{4} = s \cdot h.$$

Es sei noch die Bemerkung gestattet, dass, wenn die Amplituden gegeben und die Höhen beliebig gewählt werden, beide Sublimitäten bereits bestimmt sind, und richtig construirt, sich umgekehrt wie die Höhen verhalten werden.

44) *Zu S. 110.* S. Anmerkung 41.

45) *Zu S. 111.* Wir hatten (Anm. 41)

$$i^2 = 2 g (h + s), \quad s = \frac{a^2}{4h} \quad \text{und} \quad h + s = k$$

ist jetzt gegeben, also

$$h + \frac{a^2}{4h} = k \quad \text{und} \quad h^2 - k h = - \frac{a^2}{4},$$

folglich

$$h = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

genau der *Galilei*'schen Construction entsprechend. Zugleich folgt

$$s = k - h = \frac{k}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Es sind also zwei Parabeln möglich. Die Brennpunkte derselben liegen gleich weit oberhalb und unterhalb der gegebenen Basis der Halbparabeln, und zwar um

$$2\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

von derselben entfernt. In der Fig. 122 haben wir der *Galilei*schen Figur die gestrichelten Theile hinzugefügt; f und f' sind die beiden gefundenen Brennpunkte.

46) *Zu S. 113.* Mit der Sinustafel kommt man einfacher zum Ziel. Es war (Anm. 41)

$$W=\frac{i^2}{g}\sin 2\alpha$$

und die Amplitude der Halbparabel

$$a=\tfrac{1}{2}\frac{i^2}{g}\sin 2\alpha;$$

aber

$$\tfrac{1}{2}\frac{i^2}{g}=h+s,$$

also

$$a=(h+s)\sin 2\alpha=10000\sin 2\alpha,$$

die gesuchte Amplitude ist also gleich dem Sinus des doppelten Anstiegwinkels.

47) *Zu S. 114.* Die Construction entspricht dem in Anmerkung 44 gegebenen Werthe

$$h=\frac{k}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

48) *Zu S. 117.* Führt man in die Gleichung der Parabel

$$y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x-\tfrac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{i^2\cos^2\alpha}$$

die Wurfweite

$$W=\frac{2}{g}i^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha$$

ein, so kommt allgemein

$$y=\frac{x}{W}(W-x)\operatorname{tg}\alpha.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$x=\frac{W}{2}$$

und y wird gleich h, mithin

$$h = \frac{W}{4} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot a,$$

wo a die Amplitude der Halbparabel ist. Für die Sublimität folgt alsdann

$$s = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{h},$$

wonach der Autor rechnen lehrt.

49) *Zu S. 118.* Es verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn man

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

in den Werth für s einsetzt, man

$$s = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

erhält, mithin wird nunmehr

$$s + h = \frac{a}{2}\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right),$$

eine bemerkenswerthe Beziehung, die man folgender Weise schreiben kann. Es sei

$$\alpha = 45^0 + \beta,$$

so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta},$$

also

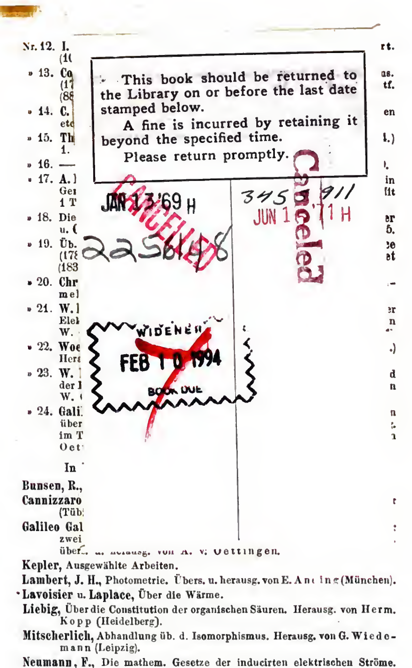
$$s + h = \frac{a}{2}\left\{\frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta} + \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta}\right\}.$$

Dieser Ausdruck bleibt derselbe, wenn für β der Werth $-\beta$ gesetzt wird. Bei Anstiegwinkeln von β Grad über und unter 45^0 wechseln die Werthe für s und h.



Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.





Nr. 12. I. ... rt.
(1(...

» 13. Co ... as.
(17 ... tf.
(88 ...

» 14. C. ... en
etc ...

» 15. Th ... l.)
1. ...

» 16. — ...

» 17. A. ... in
Ger ... lit
1 T ...

» 18. Die ... er
u. (... 5.

» 19. Üb. ... se
(178 ... et
(183 ...

» 20. Chr ...
mel ...

» 21. W. ... er
Elek ... n
W. ...

» 22. Woe ... .)
Herc ...

» 23. W. ... d
der ... n
W. ...

» 24. Gali ... n
über ...
im T ... n
Oet ...

In ...

Bunsen, R., ...
Cannizzaro ...
(Tüb ...
Galileo Gal ...
zwei ...
über ... herausg. von A. v. Oettingen.

Kepler, Ausgewählte Arbeiten.

Lambert, J. H., Photometrie. Übers. u. herausg. von E. Anding (München).

Lavoisier u. **Laplace,** Über die Wärme.

Liebig, Über die Constitution der organischen Säuren. Herausg. von Herm. Kopp (Heidelberg).

Mitscherlich, Abhandlung üb. d. Isomorphismus. Herausg. von G. Wiedemann (Leipzig).

Neumann, F., Die mathem. Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. II. Herausg. von C. Neumann (Leipzig).

Pasteur, L., Über die Asymmetrie bei natürlich vorkommenden organischen Verbindungen. Übers. u. herausg. von M. u. A. Ladenburg (Breslau).

Wilhelm Engelmann.

